SAINT-SERNIN

CONTRÔLE 16

Exercice 1:

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^x - 2x.$$

Partie A

1. Soit P la fonction polynôme de degré deux définie par $P(x) = x^2 + 4x + 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donner le tableau de signe de P sur $\mathbb{R}$.
2. Soit g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x(x+2) - 2$.
   (a) Calculer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$. Qu'elle interprétation géométrique peut-on faire sur $\mathcal{C}_g$?
   (b) Montrer que $g'(x) = P(x)e^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que g' et P ont le même signe sur $\mathbb{R}$.
   (c) Construire le tableau complet de variations de g sur $\mathbb{R}$.
   (d) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha) = 0$. Donner un encadrement de α à 10^{-3} près.
   (e) Quel est le signe de g sur $\mathbb{R}$?

Partie B

1. Donner les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. (a) Montrer que $f(\alpha) = -2\alpha \times \left(\dfrac{1+\alpha}{2+\alpha}\right)$.
   (b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. Calculer la dérivé f' de f sur $\mathbb{R}$. Que remarque-t-on?
4. En déduire le tableau complet de variations de f sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$.

6. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et donner les éventuels points d'inflexions.
7. Tracer $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}_f$ dans un repère de votre choix.

Exercice 2:

Cet exercice est un QCM, donner, en justifiant, les éventuelles bonnes réponses possibles.

On considère la fonction f définie pour tout $x \in [-10; 10]$ par :

$$f(x) = 1 + (x-5)e^{0,2x}.$$

1. La dérivée seconde de f sur $[-10; 10]$ est :
   a) $f''(x) = \dfrac{(x+5)e^{0,2x}}{25}$ b) $f''(x) = \dfrac{xe^{0,2x}}{5}$
   c) $f''(x) = (x-5)e^{0,2x}$. d) $f''(x) = 0$.
2. La fonction f' est :
   a) décroissante sur $[-5; 0]$. b) décroissante sur $[-10; 0]$.
   c) croissante sur $[-10; 5]$. d) croissante sur $[-5; 5]$.
3. La fonction f est :
   a) concave sur $[-5; 0]$. b) concave sur $[-10; 0]$.
   c) convexe sur $[-10; 5]$. d) convexe sur $[-5; 5]$
4. Sur $[0; 5]$, $\mathcal{C}_f$ est :
   a) au-dessus de ses tangentes. b) au-dessus de ses sécantes (ou cordes).
   c) en dessous de ses tangentes. d) en dessous de ses sécantes (ou cordes).
5. $\mathcal{C}_f$ admet au point d'inflexion d'abscisse égale à :
   a) 5. b) 0.
   c) 10. d) -5.

Exercice 3:

Partie A : Une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Étudier les variations de g, donner son tableau de variations complet.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]2,1; 2,2[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
3. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Cont.

Partie B : La fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}, f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}.$$
3. En déduire le tableau de variations complet de f.
4. (a) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}, f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}.$$
   (b) Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$.
   (c) Étudier la position de la courbe représentative de f avec la droite d'équation $y = x + 2$.

Exercice 4:

Déterminer si les fonctions suivantes sont continues en 0 :

1. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^4 + 5x^2 + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.
2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.
3. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

The End.