SAINT-SERNIN

CORRECTION CONTRÔLE 16

Exercice 1:

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2e^x - 2x.$$

Partie A

1. Soit P la fonction polynôme de degré deux définie par $P(x) = x^2 + 4x + 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Donnons le tableau de signe de P sur $\mathbb{R}$.
   Posons $P(x) = 0$.
   $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0$
   Soit Δ le discriminant de cette équation.
   $\Delta = (4)^2 - 4(1)(2) = 16 - 8 = 8 = (2\sqrt{2})^2$.
   $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :
   $x_1 = \dfrac{-4 - 2\sqrt{2}}{2} = -2 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{-4 + 2\sqrt{2}}{2} = -2 + \sqrt{2}$.
   Ainsi, on obtient le tableau de signe ci-dessous.

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Soit g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x(x + 2) - 2$.

   (a) Calculons les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty} xe^x(x+2) - 2\\ &= +\infty \times +\infty - 2 \text{ car } \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x+2) = +\infty\end{cases}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

D'où $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} g(x) &= \lim_{x \to -\infty} xe^x(x+2) - 2 \\
&= \lim_{x \to -\infty} x^2e^x + 2xe^x - 2 \\
&= 0 + 0 - 2 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \to -\infty} x^2e^x = 0 \text{ car } 2 > 0 \\ \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0 \end{cases} \\
&= -2
\end{aligned}$$

D'où $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -2$.

Interprétation géométrique sur $\mathcal{C}_g$.
De ce qui précède on a: $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -2$ donc la courbe $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$ au voisinage de $-\infty$.
De plus, on a : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et
$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{xe^x(x+2) - 2}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^x(x+2) - \dfrac{2}{x} = +\infty.$
Donc la courbe $\mathcal{C}_g$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

(b) Montrons que $g'(x) = P(x)e^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= (xe^x)'(x+2) + xe^x(x+2)' - (2)' \\
&= (e^x + xe^x)(x+2) + xe^x \\
&= (x+1)(x+2)e^x + xe^x \\
&= (x^2 + 2x + x + 2)e^x + xe^x \\
&= (x^2 + 3x + 2)e^x + xe^x \\
&= (x^2 + 4x + 2)e^x \\
&= P(x)e^x
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Déduisons que g' et P ont le même signe sur $\mathbb{R}$.
De ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = P(x)e^x$.
Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, donc $g'(x)$ est du même signe que $P(x)$.
D'où g' et P ont le même signe sur $\mathbb{R}$.

(c) Construisons le tableau complet de variations de g sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
P		$+$	0	$-$	0	$+$	
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	-2	$\nearrow$	$g(-2-\sqrt{2})$	$\searrow$	$g(-2+\sqrt{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\begin{aligned}
g(-2-\sqrt{2}) &= (-2-\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}(-2-\sqrt{2}+2)-2\\
&= -\sqrt{2}(-2-\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}-2\\
g(-2-\sqrt{2}) &= (2\sqrt{2}+2)e^{-2-\sqrt{2}}-2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(-2+\sqrt{2}) &= (-2+\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}(-2+\sqrt{2}+2)-2\\
&= \sqrt{2}(-2+\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}-2\\
&= (2-2\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}-2\\
&= 2(1-\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}-2
\end{aligned}$$

(d) Montrons qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha)=0$.
D'après le tableau de variation ci-dessus,

- pour tout $x \in]-\infty, -2-\sqrt{2}[$ on a :
  $-2 \leq f(x) \leq g(-2-\sqrt{-2})$ or $g(-2-\sqrt{2}) = (2\sqrt{2}+2)e^{-2-\sqrt{2}}-2 = -1,841 < 0$.
  Ainsi, la fonction g n'admet aucune solution dans l'intervalle $]-\infty,-2-\sqrt{2}[$ car ne subit aucun changement de signe sur cet intervalle.
- pour tout $x \in]-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}[$ on a:
  $-1,841 \geq g(x) \geq g(-2+\sqrt{2})$ or $g(-2+\sqrt{2}) = 2(1-\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}-2 = -2,461 < 0$.
  Ainsi, la fonction g n'admet aucune solution dans l'intervalle $]-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}[$ car ne subit aucun changement de signe sur cet intervalle.
- pour tout $x \in]-2+\sqrt{2}, +\infty[$ on a:
  $]-2+\sqrt{2}, 1] \subset]-2+\sqrt{2}, +\infty[$ or $g(1) = 3e-2 = 6,155 > 0$ et $g(-2+\sqrt{2}) < 0$.
  $g(1) \times g(-2+\sqrt{2}) < 0$ et la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]-2+\sqrt{2}, 1]$ alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in]-2+\sqrt{2}, 1]$ tel que $g(\alpha)=0$.
  D'où il existe une unique solution α pour l'équation $g(x)=0$.

Donnons un encadrement de α à 10^{-3} près.
Après une représentation de la fonction g on conjecture que $\alpha \in [0,49; 0,50]$.
$g(0,49) = 0,49e^{0,49}(0,49+2)-2 = -0,0084 < 0$
$g(0,50) = 0,50e^{0,50}(0,50+2)-2 = 0,061 > 0$
$g(0,49) \times g(0,50) < 0$ donc la conjecture est bien vérifiée.
Appliquons pour la suite l'algorithme de dichotomie.

On s'arrête lorsque l'amplitude de l'intervalle en cours est de 0,001.

- $c_1 = \dfrac{0,49+0,50}{2} = 0,495.$
  $g(0,49) < 0$ et $g(0,50) > 0$.
  $g(0,495) = 0,495e^{0,495}(0,495+2) - 2 > 0.$
  $g(0,49) \times g(0,495) < 0$ donc $\alpha \in [0,49; 0,495]$.
- $c_2 = \dfrac{0,495+0,49}{2} = 0,4925$
  $g(0,49) < 0$ et $g(0,495) > 0$
  $g(0,4925) = 0,4925e^{0,4925}(0,4925+2) - 2 > 0$
  $g(0,49) \times g(0,4925) < 0$ donc $\alpha \in [0,49; 0,4925]$.
- $c_3 = \dfrac{0,4925+0,49}{2} = 0,49125$
  $g(0,49) < 0$ et $g(0,4925) < 0$
  $g(0,49125) = 0,49125e^{0,49125}(0,49125+2) - 2 > 0$
  $g(0,49) \times g(0,49125) < 0$ donc $\alpha \in [0,49; 0,49125]$.
  $0,49125 - 0,49 = 0,00125$.
  D'où un encadrement d'amplitude 10^{-3} est : $0,49 \leq \alpha \leq 0,49125$.

(e) Donnons le signe de g sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in]-\infty, \alpha[$, $g(x) < 0$,
pour tout $x \in]\alpha, +\infty[$, $g(x) > 0$ et $g(\alpha) = 0$.

Partie B

1. Donnons les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x^2e^x - 2x \\
&= \lim_{x\to+\infty} x(xe^x - 2) \\
&= +\infty \times +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^x - 2 = +\infty \end{cases} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} x^2e^x - 2x \\
&= 0 + (+\infty) \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty \end{cases} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

2. (a) Montrons que $f(\alpha) = -2\alpha \times \left(\dfrac{1+\alpha}{2+\alpha}\right)$.
$f(\alpha) = \alpha^2e^\alpha - 2\alpha$.
Cherchons e^α.

On sait que $g(\alpha) = 0$ donc $\alpha e^{\alpha}(\alpha+2) - 2 = 0$ alors $e^{\alpha} = \dfrac{2}{\alpha(\alpha+2)}$.
En remplaçant l'expression de e^{α} trouvée dans $f(\alpha)$ on obtient:

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= \alpha^2 \times \frac{2}{\alpha(\alpha+2)} - 2\alpha \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha+2} - \frac{2\alpha(\alpha+2)}{\alpha+2} \\
&= \frac{-2\alpha[-1+(\alpha+2)]}{\alpha+2} \\
&= \frac{-2\alpha(\alpha+1)}{\alpha+2} \\
&= -2\alpha\left(\frac{1+\alpha}{2+\alpha}\right)
\end{aligned}$$

(b) Déduisons un encadrement de $f(\alpha)$.
De ce qui précède, on a: $f(\alpha) = -2\alpha \times \left(\dfrac{1+\alpha}{2+\alpha}\right)$.
De la question 2. (d) on a l'encadrement de α: $0,49 \leq \alpha \leq 0,49125$.

$$\begin{aligned}
0,49 \leq \alpha \leq 0,49125 &\Leftrightarrow 2 \times 0,49 \leq 2\alpha \leq 2 \times 0,49125 \\
&\Leftrightarrow 0,98 \leq 2\alpha \leq 0,9825
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0,49 \leq \alpha \leq 0,49125 &\Leftrightarrow 1+0,49 \leq 1+\alpha \leq 1+0,49125 \\
&\Leftrightarrow 1,49 \leq 1+\alpha \leq 1,49125
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0,49 \leq \alpha \leq 0,49125 &\Leftrightarrow 2+0,49 \leq 2+\alpha \leq 2+0,49125 \\
&\Leftrightarrow 2,49 \leq 2+\alpha \leq 2,49125 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2,49125} \leq \frac{1}{2+\alpha} \leq \frac{1}{2,49} \\
&\Leftrightarrow \frac{1,49}{2,49125} \leq \frac{1+\alpha}{2+\alpha} \leq \frac{1,49125}{2,49} \\
&\Leftrightarrow 0,598 \leq \frac{1+\alpha}{2+\alpha} \leq 0,5989 \\
&\Leftrightarrow 0,598 \times 0,98 \leq 2\alpha \times \left(\frac{1+\alpha}{2+\alpha}\right) \leq 0,5989 \times 0,9825 \\
&\Leftrightarrow 0,586 \leq 2\alpha \times \left(\frac{1+\alpha}{2+\alpha}\right) \leq 0,5884 \\
&\Leftrightarrow -0,5884 \leq -2\alpha \times \left(\frac{1+\alpha}{2+\alpha}\right) \leq -0,586
\end{aligned}$$

D'où on obtient l'encadrement de $f(\alpha)$ suivant:
$-0,5884 \leq f(\alpha) \leq -0,586$

3. Calculons la dérivé f' de f sur $\mathbb{R}$ et disons ce que nous remarquons.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)'e^x + x^2(e^x)' - (2x)' \\ &= 2xe^x + x^2e^x - 2 \\ &= xe^x(x+2) - 2 \end{aligned}$$

Nous remarquons donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x) = xe^x(x+2) - 2$

4. Déduisons le tableau complet de variations de f sur $\mathbb{R}$.
   De ce qui précède, on a puis remarqué que $f'(x) = g(x)$ donc la fonction dérivée f' est du même signe que la fonction g.
   Or de la question 2.(e) de la **Partie A** on a :
   Pour tout $x \in]-\infty, \alpha[$, $g(x) < 0$,
   pour tout $x \in]\alpha, +\infty[$, $g(x) > 0$ et $g(\alpha) = 0$.
   On obtient ainsi le tableau ci-dessous

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g		$-$	0	$+$	
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Montrons que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$.
   D'après la question 1 de la **Partie B** , on sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

   Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2e^x - 2x}{x} \\ &= \lim_{x \to -\infty} xe^x - 2 \\ &= -2 \text{ car } \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0 \end{aligned}$$

   Observons la limite $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + 2x$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) + 2x &= \lim_{x \to -\infty} x^2e^x - 2x + 2x \\ &= \lim_{x \to -\infty} x^2e^x \\ &= 0 \end{aligned}$$

   D'où la droite d'équation $y = -2x$ est bien asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$.

Cont.

6. Étudions la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et donnons les éventuels points d'inflexions.
   Étudions le signe de la fonction $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$ donc $f''(x) = g'(x)$ ainsi $f''(x)$ a le même signe que $g'(x)$.
   D'après la réponse de la question 2.(c) de la **Partie A** on a:

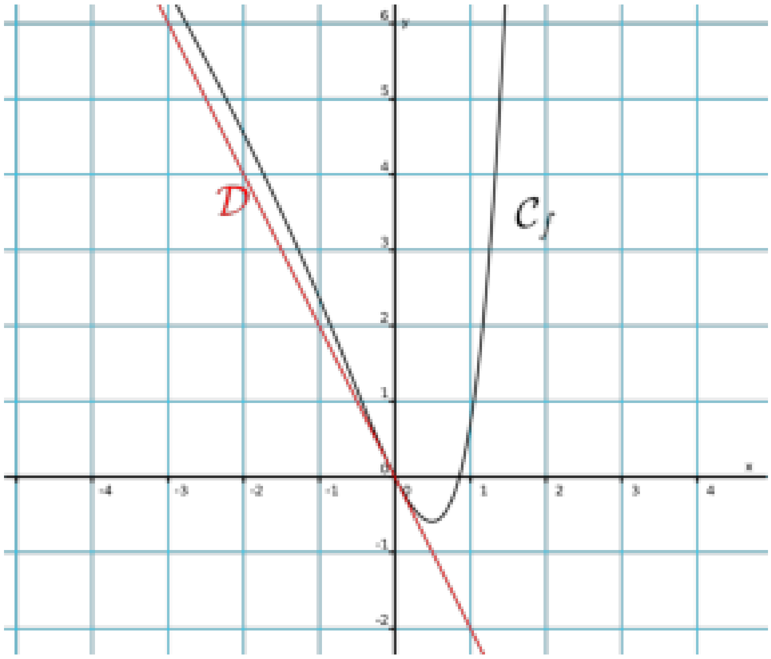
x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	

   On en déduit donc que:

   - pour tout $x \in]-\infty, -2-\sqrt{2}]$, $f''(x) \geq 0$,
     d'où la fonction f est convexe sur l'intervalle $]-\infty, -2-\sqrt{2}]$.
   - pour tout $x \in [-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}]$, $f''(x) \leq 0$,
     d'où la fonction f est concave sur l'intervalle $[-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}]$.
   - pour tout $x \in [-2+\sqrt{2}, +\infty[$, $f''(x) \geq 0$,
     d'où la fonction f est convexe sur l'intervalle $[-2+\sqrt{2}, +\infty[$.

   La dérivée seconde f'' de la fonction f s'annule en changeant de signe aux point d'abscisse $-2-\sqrt{2}$ et $-2+\sqrt{2}$ donc la fonction f admet des points d'inflexions de coordonnées:
   $(-2-\sqrt{2}, f(-2-\sqrt{2}))$ et $(-2+\sqrt{2}, f(-2+\sqrt{2}))$

7. Traçons $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}_f$ dans un repère.



Exercice 2:

Donnons, en justifiant, les éventuelles bonnes réponses possibles.

On considère la fonction f définie pour tout $x \in [-10; 10]$ par :

$$f(x) = 1 + (x-5)e^{0,2x}.$$

1. La dérivée seconde de f sur $[-10;10]$ est : a) $f''(x) = \dfrac{(x+5)e^{0,2x}}{25}$.
   Pour tout $x \in [-10;10]$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-5)'e^{0,2x} + (x-5)(e^{0,2x})' \\ &= e^{0,2x} + 0,2(x-5)e^{0,2x} \\ &= e^{0,2x} + 0,2xe^{0,2x} - e^{0,2x} \\ &= 0,2xe^{0,2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (0,2x)'e^{0,2x} + 0,2x(e^{0,2x})' \\ &= 0,2e^{0,2x} + 0,2 \times 0,2xe^{0,2x} \\ &= 0,2e^{0,2x} + 0,04xe^{0,2x} \\ &= (0,04x + 0,2)e^{0,2x} \\ &= 0,04(x+5)e^{0,2x} \\ &= \frac{(x+5)e^{0,2x}}{25} \end{aligned}$$

   D'où la réponse a) est bien la bonne réponse.

2. La fonction f' est : d) croissante sur $[-5;5]$.
   En effet, la dérivée de la fonction f' est la fonction f''.
   De la question précédente, pour tout $x \in [-10,10]$, $f''(x) = \dfrac{(x+5)e^{0,2x}}{25}$.
   Or pour tout $x \in [-10,10]$, $\dfrac{e^{0,2x}}{25} > 0$ donc $f''(x)$ a le signe de la fonction $x \mapsto x+5$.
   Posons $x+5=0$.
   $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$.
   Faisons un tableau de signe.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	

   On déduit de ce tableau de signe que pour tout $x \in [-5,5]$, $f''(x) \geq 0$ donc la fonction f' est bien croissante sur l'intervalle $[-5,5]$.

3. La fonction f est : d) convexe sur $[-5;5]$.
   En effet, de la réponse précédente, pour tout $x \in [-5;5]$, $f''(x) \geq 0$ donc la fonction f est bien convexe sur l'intervalle $[-5;5]$.

4. Sur $[0;5]$, $\mathcal{C}_f$ est : a) au-dessus de ses tangentes et d) en dessous de ses sécantes (ou cordes).
   En effet, la fonction f est une fonction convexe sur l'intervalle $[-5,5]$ d'après la réponse précédente, donc sur cet intervalle la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus et de ces tangentes et en dessous de ces sécantes; d'où la justification de nos choix.

5. $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse égale à : d) -5.
   D'après le tableau de signe de la fonction f'' à la question 2), on constate que la dérivée seconde de la fonction f s'annule en -5 en changeant de signe. D'où -5 est bien l'abscisse d'un point d'inflexion à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3:

Partie A : Une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Étudions les variations de g et donnons son tableau de variations complet.
   La fonction g est une fonction polynôme alors elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 - 3$.
   Posons $g'(x) = 0$.
   $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$ car $3 \neq 0$.
   $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.
   Faisons un tableau de signe

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g			-2				$+\infty$
		↗		↘		↗	
	$-\infty$				-6		

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty} x^3 - 3x - 4 \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^3 \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} g(x) &= \lim_{x\to-\infty} x^3 - 3x - 4 \\
&= \lim_{x\to-\infty} x^3 \\
&= -\infty
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(-1) &= (-1)^3 - 3(-1) - 4 \\
&= -1 + 3 - 4 \\
g(-1) &= -2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(1) &= 1^3 - 3 \times 1 - 4 \\
&= 1 - 3 - 4 \\
&= -6
\end{aligned}
$$

Cont.

On conclut donc que la fonction g est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]-1,1[$.

2. Montrons qu'il existe un unique $\alpha \in]2,1;2,2[$ tel que $g(\alpha)=0$.
On a : $g(2,1)=(2,1)^3-3(2,1)-4=-1,039<0$ et $g(2,2)=(2,2)^3-3(2,2)-4=0,048>0$.
On sait aussi que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$
or $]2,1;2,2[\subset]1,+\infty[$ donc g est strictement croissante sur $]2,1;2,2[$.
g est strictement croissante sur $]2,1;2,2[$ et $g(2,1)\times g(2,2)<0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in]2,1;2,2[$ tel que $g(\alpha)=0$.

3. Donnons une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
En appliquant l'algorithme de dichotomie de façon successive, on obtient $\alpha \in [2,19;2,2[$.
En effet, $g(2,19)=(2,19)^3-3(2,19)-4=-0,066<0$ et $g(2,2)>0$ donc $g(2,19)\times f(2,2)<0$ d'où on a bien $\alpha\in[2,19;2,2[$.
$2,2-2,19=0,01$.
Ainsi une valeur approchée de α à 10^{-2} près est $2,19$

4. Étudions le signe de g sur $\mathbb{R}$.
D'après le tableau de variation de la fonction g obtenu à la question 1), on a:

- pour tout $x\in]-\infty,-1]$, $g(x)\leq -2$
- pour tout $x\in[-1,1]$, $-6\leq g(x)\leq -2$
- pour tout $x\in[1,\alpha[$, $-6\leq g(x)<0$
- pour tout $x\in[\alpha,+\infty[$, $0\leq g(x)$

En résumé pour tout $x\in]-\infty,\alpha[$, $g(x)<0$ et pour tout $x\in[\alpha,+\infty[$, $g(x)\geq 0$.

Partie B : La fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ par :

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$$

1. Déterminons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}\\ &= \lim_{x\to+\infty} x\\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}\\ &= \lim_{x\to-\infty} x\\ &= -\infty\end{aligned}$$

Cont.

Étudions le signe de la fonction $x \mapsto x^2 - 1$.
Posons $x^2 - 1 = 0$.
$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.
Faisons un tableau de signe.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} \\
&= \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (x^3 + 2x^2) \times \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{1}{x^2 - 1} \\
&= 1 \times +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (x^3 + 2x^2) = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \dfrac{1}{x^2 - 1} = +\infty \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} \\
&= \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (x^3 + 2x^2) \times \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{1}{x^2 - 1} \\
&= 1 \times -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (x^3 + 2x^2) = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{1}{x^2 - 1} = -\infty \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} \\
&= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x^3 + 2x^2) \times \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x^2 - 1} \\
&= 3 \times +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x^3 + 2x^2) = 3 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{1}{x^2 - 1} = +\infty \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}\\
&= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x^3+2x^2) \times \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x^2-1}\\
&= 3 \times -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x^3+2x^2) = 3\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1}{x^2-1} = -\infty \end{cases}\\
\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) &= -\infty
\end{aligned}$$

2. Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}, f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$;

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x^3+2x^2)'(x^2-1)-(x^2-1)'(x^3+2x^2)}{(x^2-1)^2}\\
&= \frac{(3x^2+4x)(x^2-1)-2x(x^3+2x^2)}{(x^2-1)^2}\\
&= \frac{3x^4-3x^2+4x^3-4x-2x^4-4x^3}{(x^2-1)^2}\\
&= \frac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2}\\
&= \frac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2}\\
&= \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

   D'où le résultat.

3. Déduisons le tableau de variations complet de f.

   Étudions le signe de la dérivée f' de la fonction f. Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$; $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
   On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$; $(x^2-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le signe du numérateur $x \mapsto xg(x)$.
   Posons $xg(x) = 0$
   $xg(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \alpha$ car α est l'unique réel pour lequel $g(\alpha) = 0$.

   Faisons le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
g		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
f'		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4. (a) Montrons que :$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}, f(x) = x + 2 + \dfrac{x+2}{x^2-1}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1} \\ &= \frac{(x+2)(x^2-1) + x + 2}{x^2-1} \\ &= \frac{x^3 - x + 2x^2 - 2 + x + 2}{x^2-1} \\ &= \frac{x^3 + 2x^2}{x^2-1} \end{aligned}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, on a bien $f(x) = x + 2 + \dfrac{x+2}{x^2-1}$.

(b) Montrons que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$.
De ce qui précède on a : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}, f(x) = x + 2 + \dfrac{x+2}{x^2-1}$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
Observons donc les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x+2)]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+2)]$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x+2)] &= \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1} - (x+2)\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^2-1} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)] &= \lim_{x\to-\infty}\left[x+2+\frac{x+2}{x^2-1}-(x+2)\right]\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x^2-1}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\\ &= 0\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)] = 0$ donc la droite d'équation $y = x+2$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f.

(c) Étudions la position de la courbe représentative de f avec la droite d'équation $y = x+2$.
$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, on a $f(x)-(x+2) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$.
Étudions le signe de la fonction $x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2-1}$.
Faisons un tableau de signe

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+2}{x^2-1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

On déduit donc à partir de ce tableau que :

- pour tout $x \in]-\infty,-2[\cup]-1,1[$, $f(x)-(x+2) < 0$.
  D'où la courbe représentative de la fonction f est en dessous de la droite d'équation $y = x+2$ sur chacun des intervalles $]-\infty,-2[$ et $]-1,1[$.
- pour tout $x \in]-2,-1[\cup]1,+\infty[$, $f(x)-(x+2) > 0$.
  D'où la courbe représentative de la fonction f est au dessus de la droite d'équation $y = x+2$ sur chacun des intervalles $]-2,-1[$ et $]1,+\infty[$.

Exercice 4:

Déterminons si les fonctions suivantes sont continues en 0 :

1. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ x^4+5x^2+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

   Vérifions si $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = f(0)$.

On a : $f(0) = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(2x+1)\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x^4+5x^2+1)\\ &= 1\end{aligned}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) \neq f(0)$.
On en déduit donc que la fonction f n'est pas continue en 0.

2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

   Vérifions si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$.
   On a $g(0) = 0$.
   $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$.
   $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$ d'où la fonction g est une fonction continue en 0.

3. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

   Vérifions si $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = h(0)$.
   On a $h(0) = 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} h(x) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{|x|}{x}\\ &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{-x}{x}\\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|x|}{x}\\ &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x}{x}\\ &= 1\end{aligned}$$

   $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} h(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = h(0)$.
   D'où la fonction h n'est pas continue en 0.

The End.