Sainte Marie des Champs

CORRECTION CONTRÔLE 13

Exercice 1:

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2+3x+1}{x-2}$$

Définie pour tout $x \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

1. Déterminons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x+1}{x-2} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{cases} \\
&= \lim_{x\to-\infty} x \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x+1}{x-2}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} x\\ &= +\infty\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2^-} f(x) &= \lim_{x\to2^-} \frac{x^2+3x+1}{x-2}\\ &= \lim_{x\to2^-} (x^2+3x+1) \times \lim_{x\to2^-} \frac{1}{x-2}\\ &= 11 \times -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to2^-} (x^2+3x+1) = 11 \\ \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty \end{cases}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2^+} f(x) &= \lim_{x\to2^+} \frac{x^2+3x+1}{x-2}\\ &= \lim_{x\to2^+} (x^2+3x+1) \times \lim_{x\to2^+} \frac{1}{x-2}\\ &= 11 \times +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to2^+} (x^2+3x+1) = 11 \\ \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty \end{cases}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$

2. Déduisons de la question précédente l'existence d'éventuelles asymptotes parallèles aux axes repère en précisant leur équation et les faisant apparaître sur le précédent graphique.
De la question précédente on a:
$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$.
Ainsi, la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées.

3. Montrons que, pour tout $x \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{x^2-4x-7}{(x-2)^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2+3x+1)'(x-2)-(x-2)'(x^2+3x+1)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(2x+3)(x-2)-(x^2+3x+1)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2-4x+3x-6-x^2-3x-1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2-4x-7}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

4. Dressons le tableau de variation complet de f.
Étudions le signe de $f'(x)$.
Pour tout $x \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$, $(x-2)^2 > 0$ donc la fonction $f'(x)$ a le signe du numérateur.
Posons $x^2-4x-7=0$
Soit Δ le discriminant de cette équation;
$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-7) = 16+28 = 44 = (2\sqrt{11})^2 > 0$.
Ainsi, l'équation admet deux solutions distinctes:
$x_1 = \dfrac{4-2\sqrt{11}}{2} = 2-\sqrt{11}$ et $x_2 = \dfrac{4+2\sqrt{11}}{2} = 2+\sqrt{11}$.
Nous obtenons donc le tableau de signe et de variation ci-dessous:

x	$-\infty$		$2-\sqrt{11}$		2		$2+\sqrt{11}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$7-2\sqrt{11}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$7+2\sqrt{11}$	↗	$+\infty$

$$\begin{aligned} f(2-\sqrt{11}) &= \frac{(2-\sqrt{11})^2+3(2-\sqrt{11})+1}{2-\sqrt{11}-2} \\ &= \frac{4-4\sqrt{11}+11+6-3\sqrt{11}+1}{-\sqrt{11}} \\ &= \frac{22-7\sqrt{11}}{-\sqrt{11}} \\ &= \frac{22\sqrt{11}-7\times 11}{-11} \\ &= 7-2\sqrt{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(2+\sqrt{11}) &= \frac{(2+\sqrt{11})^2+3(2+\sqrt{11})+1}{2+\sqrt{11}-2} \\
&= \frac{4+4\sqrt{11}+11+6+3\sqrt{11}+1}{\sqrt{11}} \\
&= \frac{22+7\sqrt{11}}{\sqrt{11}} \\
&= \frac{22\sqrt{11}+7\times 11}{11} \\
&= 7+2\sqrt{11}
\end{aligned}$$

5. **Question facultatives :**

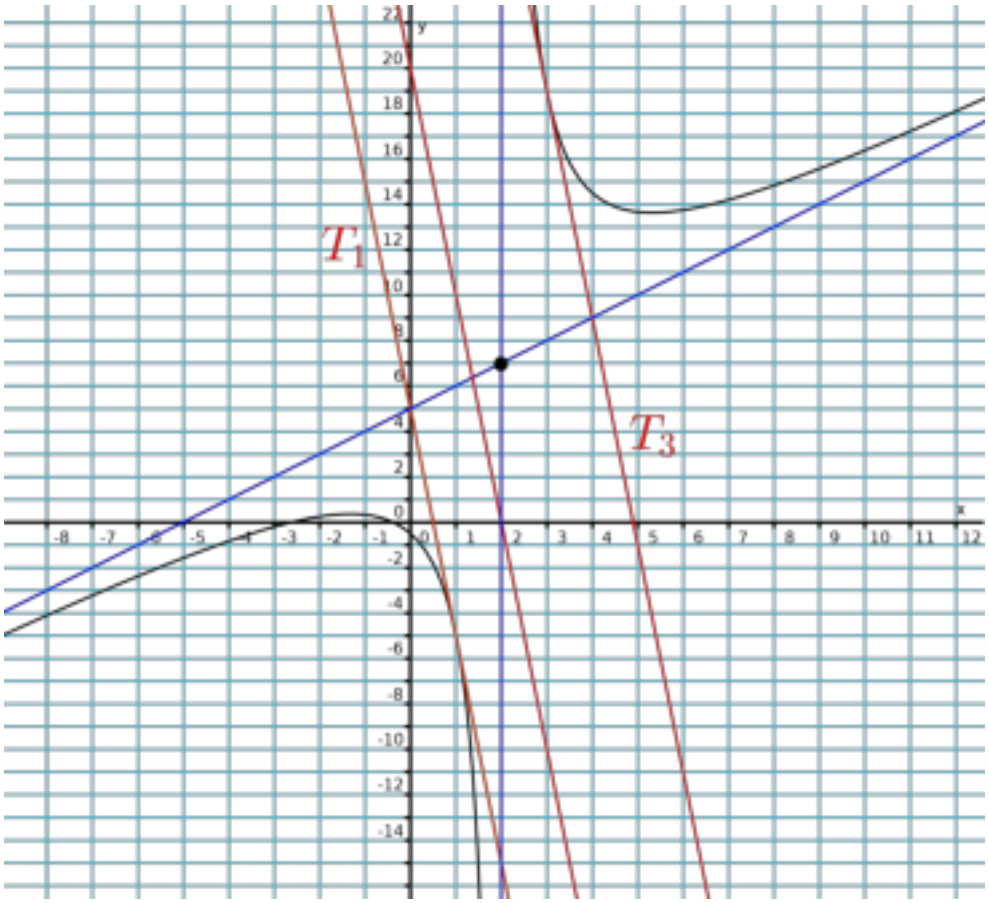
   (a) Vérifions s'il existe une tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ qui soit parallèle à la droite d_1 d'équation $y=-10x+20$. S'il existe, traçons cette tangente.
   Soit $T : y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ cette tangente au point d'abscisse x_0 à la courbe $\mathcal{C}_f$ si elle existe.
   La tangente T étant parallèle à la droite d'équation $y=-10x+20$ alors $f'(x_0)=-10$.

$$\begin{aligned}
f'(x_0)=-10 &\Leftrightarrow \frac{x_0^2-4x_0-7}{(x_0-2)^2}=-10 \\
&\Leftrightarrow x_0^2-4x_0-7=-10(x_0^2-4x_0+4) \\
&\Leftrightarrow x_0^2-4x_0-7=-10x_0^2+40x_0-40 \\
&\Leftrightarrow 11x_0^2-44x_0+33=0 \\
&\Leftrightarrow x_0^2-4x_0+3=0
\end{aligned}$$

   Soit Δ le discriminant de l'équation $x_0^2-4x_0+3=0$.
   $\Delta=(-4)^2-4(1)(3)=16-12=4=2^2$
   $\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :
   $x_1=\dfrac{4-2}{2}=1$ et $x_2=\dfrac{4+2}{2}=3$.
   Ainsi, $x_0=1$ ou $x_0=3$.

   - Pour $x_0=1$ on a:
     $T_1 : y = f'(1)(x-1)+f(1)$ or
     $f(1)=\dfrac{1^2+3\times 1+1}{1-2}=-5$ et $f'(1)=-10$
     Donc $T_1 : y=-10(x-1)-5=-10x+10-5=-10x+5$
     D'où $T_1 : y=-10x+5$.
   - Pour $x_0=3$ on a:
     $T_3 : f'(3)(x-3)+f(3)$ or
     $f(3)=\dfrac{3^2+3\times 3+1}{3-2}=\dfrac{9+9+1}{1}=19$ et $f'(3)=-10$.
     Donc $T_3 : y=-10(x-3)+19=-10x+30+19=-10x+49$
     D'où $T_3 : y=-10x+49$.

   Voir la représentation des tangentes T_1 et T_3 sur le graphe de la fonction f.



(b) Conjecturons graphiquement l'existence d'une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$.
La droite d_2 est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$.
Démontrons cette conjecture en étudiant les limites en l'infini de $f(x) - (x+5)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+5) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x+1}{x-2} - (x+5) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x+1-(x+5)(x-2)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x+1-(x^2-2x+5x-10)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x+1-x^2-3x+10}{x-2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{11}{x-2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+5) = 0$ donc la droite d'équation $y = x+5$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$. Après représentation de la droite d'équation $y = x+5$, elle coïncide avec la droite d_2 donc la conjecture est bien vérifiée.

(c) Conjecturons graphiquement l'existence d'un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.
Le centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ est le point d'intersection des asymptotes verticale et oblique.
Ce point a pour coordonnées : $(2, 7)$.
Démontrons cette conjecture en vérifiant l'égalité $f(a-x) + f(a+x) = 2b$ pour tout

Cont.

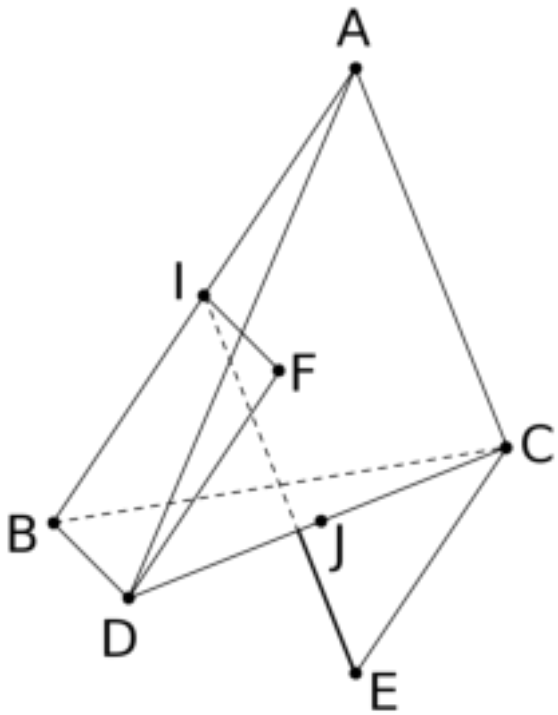
$x \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ où a et b sont des réels bien choisis.
D'après la conjecture le centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ est le point de coordonnées $(2, 7)$ donc $a = 2$ et $b = 7$ ainsi, pour tout $x \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ on a:

$$\begin{aligned}
f(a-x) + f(a+x) &= f(2-x) + f(2+x) \\
&= \frac{(2-x)^2 + 3(2-x) + 1}{2-x-2} + \frac{(2+x)^2 + 3(2+x) + 1}{2+x-2} \\
&= \frac{4 - 4x + x^2 + 6 - 3x + 1}{-x} + \frac{4 + 4x + x^2 + 6 + 3x + 1}{x} \\
&= \frac{x^2 - 7x + 11}{-x} + \frac{x^2 + 7x + 11}{x} \\
&= \frac{-x^2 + 7x - 11 + x^2 + 7x + 11}{x} \\
&= \frac{14x}{x} \\
&= 14 \\
&= 2 \times 7 \\
&= 2b
\end{aligned}$$

On a bien $f(2-x) + f(2+x) = 2 \times 7$.
D'où le point de coordonnées $(2, 7)$ est bien le centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2:

On considère un tétraèdre $ABCD$ où I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$. On construit les points E et F tel que les quadrilatères $IACE$ et $IBDF$ soient des parallélogrammes.



On se place dans le repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$.

1. Donnons les coordonnées des points B, C, D, A, I et J.

   - B étant l'origine du repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$ alors $B\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
   - Point C
     $\overrightarrow{BC} = 1 \times \overrightarrow{BC} + 0 \times \overrightarrow{BD} + 0 \times \overrightarrow{BA}$
     D'où $C\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
   - Point D
     $\overrightarrow{BD} = 0 \times \overrightarrow{BC} + 1 \times \overrightarrow{BD} + 0 \times \overrightarrow{BA}$
     D'où $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$
   - Point A
     $\overrightarrow{BA} = 0 \times \overrightarrow{BC} + 0 \times \overrightarrow{BD} + 1 \times \overrightarrow{BA}$
     D'où $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
   - Point I
     $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ car I est le milieu du segment $[BA]$.
     Ainsi, $I\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$
   - Point J
     Le point J est le milieu du segment $[DC]$ donc :
     $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$
     On connaît les coordonnées des points $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ donc :
     $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}x_J\\y_J-1\\z_J\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{DJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_J=\frac{1}{2}\\y_J-1=-\frac{1}{2}\\z_J=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_J=\frac{1}{2}\\y_J=\frac{1}{2}\\z_J=0\end{cases}$$

D'où $J\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

2. (a) Montrons que $\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ et déduisons les coordonnées de E.
On sait que IACE est un parallélogramme donc $\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{AC}&\Leftrightarrow\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{IB}\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BI}\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\text{ car }\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

D'où le résultat.
Ainsi, $E\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

(b) Montrons que $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}$ et déduisons les coordonnées de F.
Le vecteur $\overrightarrow{BF}$ est la résultante de des vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BD}$ donc :
$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{BD}$ or $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ donc $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}$.

On déduit que $F\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

3. (a) Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EJ}$.

On sait que $F\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $J\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$.

Donc, on a: $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-1\\\frac{1}{2}-0\\0+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

(b) Déduisons la position du point J sur le segment $[FE]$.
De ce qui précède, on a :

$\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

On remarque que $\overrightarrow{EJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$ donc le point J est le milieu du segment $[EF]$.

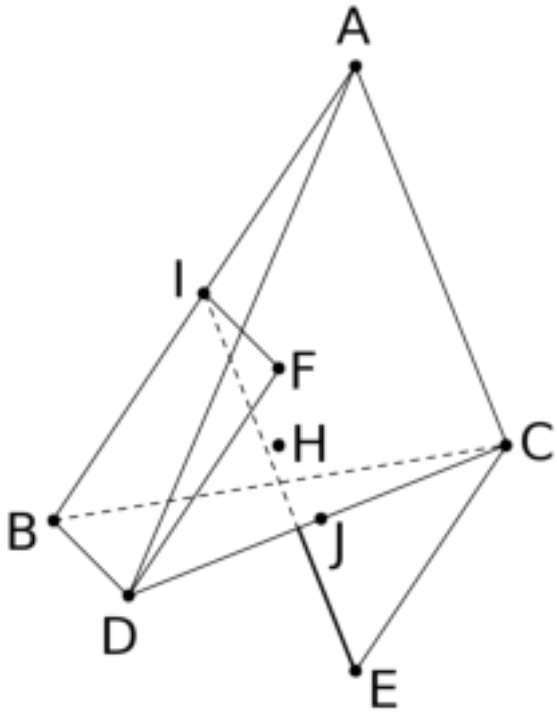
4. (a) (*) Donnons la représentation paramétrique de la droite (EF).

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un point de l'espace.

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(EF)$ s'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{EM}=\alpha\overrightarrow{EF}$.

$$\overrightarrow{EM}=\alpha\overrightarrow{EF}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=-\alpha\\y-0=\alpha\\z+\frac{1}{2}=\alpha\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\alpha+1\\y=\alpha\\z=\alpha-\frac{1}{2}\end{cases}$$

(b) (*) Plaçons sur le schéma le point $H\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{1}{3}\right)$.



Non le point H n'appartient pas à la droite (EF).

5. (*) Étudions la position relative des droites (EF) et (ID).

   Le vecteur $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et

   $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}0-0\\0-1\\\frac{1}{2}-0\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}0\\-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

   L'abscisse du vecteur $\overrightarrow{DI}$ est nulle tandis que les composantes du vecteur $\overrightarrow{EF}$ sont tous non nulle donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{EF}$ étant non colinéaires on conclut donc que les droites (EF) et (DI) sont sécantes.

The End.