Sainte Marie des Champs

CORRECTION CONTRÔLE 9

Exercice 1:

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Justifions que l'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f =]-\infty; -3[\cup [1; +\infty[$.
D'après la représentation graphique de f, la courbe admet une branche qui a été représentée de $-\infty$ suivant l'axe des abscisses et admet au point d'abscisse -4 une tangente avant de continuer avec une branche infinie suivant l'asymptote d'équation $y = -3$. Aussi la courbe représentative de f n'est pas représentée dans l'intervalle des abscisses allant de -3 exclut à 1 inclut, donc la fonction f n'est pas définie pour les abscisses allant de -3 inclut à 1 exclut. De plus, cette courbe admet une branche qui débute au point d'abscisse 1 suivant l'axe des abscisses jusqu'en $+\infty$.
Par conséquent, le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f =]-\infty; -3[\cup [1; +\infty[$.

2. Montrons que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f \backslash \{1\}$: $f'(x) = \dfrac{2}{(x+3)^2}\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}$.

   On sait que pour toute fonction u dérivable et strictement positive on a: $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}_f \backslash \{1\}$, on a:

   $$f'(x) = \left(\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}\right)' = \frac{\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}}.$$

   Calculons $\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)'$.

   $$\left(\frac{x-1}{x+3}\right)' = \frac{(x-1)'(x+3) - (x-1)(x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{(x+3)-(x-1)}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2}.$$

   Par suite, pour tout $x \in \mathcal{D}_f \backslash \{1\}$, on a:

   $$f'(x) = \frac{\dfrac{4}{(x+3)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}} = \frac{4}{(x+3)^2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{x+3}{x-1}} = \frac{2}{(x+3)^2}\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}.$$

D'où pour tout $x \in \mathcal{D}_f \backslash \{1\}$, $f'(x) = \dfrac{2}{(x+3)^2}\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}$.

3. Dressons le tableau de variation de f. (Les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$ ne sont pas demandée, mais nous les ajoutons pour votre compréhension).
   En se basant sur la représentation graphique de la fonction f on obtient le tableau de variation ci-dessous.

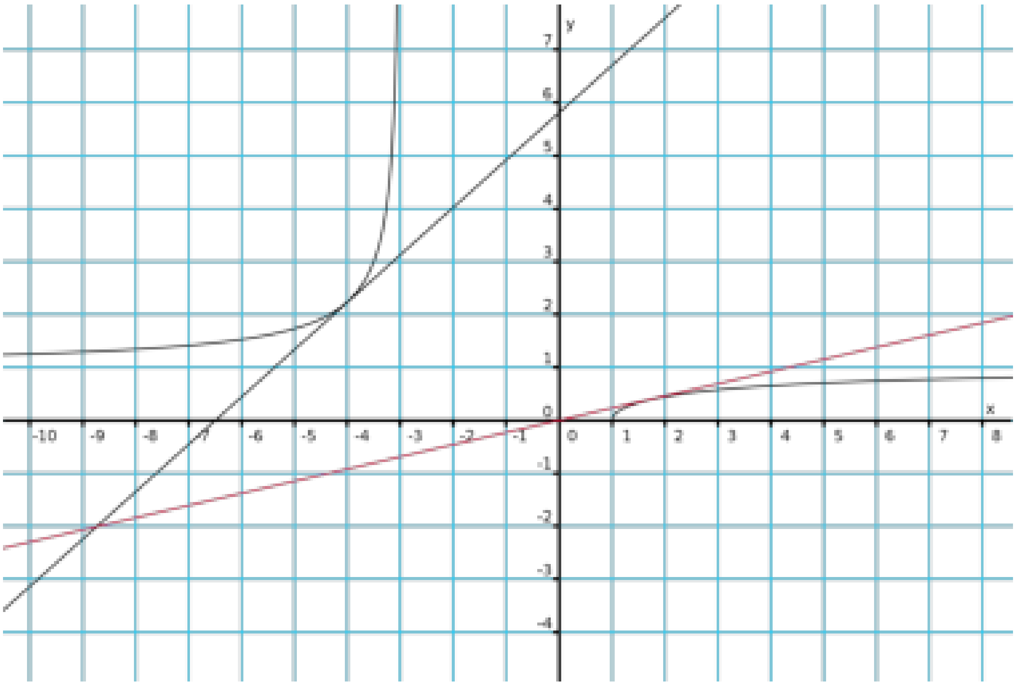
x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
f	1	$\nearrow$	$+\infty$		0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Déterminons une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -4 et traçons cette tangente sur le précédent graphique.
   Soit T la tangente au point d'abscisse -4.
   $T : y = f'(-4)(x+4) + f(-4)$.
   Calculons $f'(-4)$ et $f(-4)$.

   - $f'(-4) = \dfrac{2}{(-4+3)^2}\sqrt{\dfrac{-4+3}{-4-1}} = \dfrac{2}{1} \times \sqrt{\dfrac{-1}{-5}} = 2 \times \sqrt{\dfrac{1}{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.
   - $f(-4) = \sqrt{\dfrac{-4-1}{-4+3}} = \sqrt{\dfrac{-5}{-1}} = \sqrt{5}$

   Ainsi, $T : y = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}(x+4) + \sqrt{5} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}x + \dfrac{8\sqrt{5}}{5} + \sqrt{5} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}x + \dfrac{13\sqrt{5}}{5}$.
   D'où $T : y = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}x + \dfrac{13\sqrt{5}}{5}$ est l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -4.

5. (*) Traçons sur le précédent graphique la tangente à $\mathcal{C}_f$ en un point A d'abscisse a passant par l'origine du repère et déterminons graphiquement une valeur approchée de a.
   Nous représentons la tangente au point A d'abscisse a en une droite rouge.
   Après lecture sur ce graphique nous pouvons dire que l'abscisse du point A est $a = 1,7$



Bonus : Retrouvons par le calcul la valeur exacte de a.

Soit T_a la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse a.
T_a étant une droite alors il existe $p, q \in \mathbb{R}$ tels que: $T_a : y = px + q$.
La tangente T_a passe par l'origine du repère donc $0 = p \times 0 + q$ ainsi $q = 0$.
Or $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a) = f'(a)x - af'(a) + f(a)$.
Par identification, on a $q = -af'(a) + f(a)$
Ainsi, $-af'(a) + f(a) = 0$ c'est-à-dire $f(a) = af'(a)$.
On a : $f(a) = \sqrt{\dfrac{a-1}{a+3}}$ et $f'(a) = \dfrac{2}{(a+3)^2}\sqrt{\dfrac{a+3}{a-1}}$
Donc

$$\begin{aligned}
f(a) = af'(a) &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a-1}{a+3}} = \frac{2a}{(a+3)^2}\sqrt{\frac{a+3}{a-1}} \\
&\Leftrightarrow \frac{\dfrac{2a}{(a+3)^2}\sqrt{\dfrac{a+3}{a-1}}}{\sqrt{\dfrac{a-1}{a+3}}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{2a}{(a+3)^2}\sqrt{\frac{a+3}{a-1}}\sqrt{\frac{a+3}{a-1}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{2a}{(a+3)^2} \times \frac{a+3}{a-1} = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{2a}{(a+3)(a-1)} = 1 \\
&\Leftrightarrow 2a = (a+3)(a-1) \\
&\Leftrightarrow a^2 - a + 3a - 3 - 2a = 0 \\
&\Leftrightarrow a^2 - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow a = \sqrt{3} \text{ ou } a = -\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Cont.

La fonction f admet une tangente en A donc elle est dérivable en a ainsi, $a \in \mathcal{D}_f \backslash \{1\}$ d'où $a = \sqrt{3}$ est la valeur de a recherchée.

Exercice 2:

Dans cette exercice, les trois questions sont indépendantes.

1. Déterminons les limites suivantes.

   (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 7x + 1}{3x^3 + x^2 - 6}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 7x + 1}{3x^3 + x^2 - 6} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(1 - \dfrac{7}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)}{3x^3\left(1 + \dfrac{1}{3x} - \dfrac{2}{x^3}\right)} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{3x^3} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{3x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x^3} = 0 \end{cases} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{3x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

   D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 7x + 1}{3x^3 + x^2 - 6} = 0$.

   (b) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \dfrac{3x^2 + 4x - 7}{x + 2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{3x^2 + 4x - 7}{x + 2} &= \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} (3x^2 + 4x - 7) \times \frac{1}{x + 2} \\
&= -3 \times -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} (3x^2 + 4x - 7) = 3(-2)^2 + 4(-2) - 7 = -3 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \dfrac{1}{x + 2} = -\infty \end{cases} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

   D'où $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \dfrac{3x^2 + 4x - 7}{x + 2} = +\infty$

(c) (*) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)}{\sqrt{x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x}} \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0\\ &= \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{x}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt{x}} = +\infty$

2. Déterminer la fonction dérivée des fonction suivantes.

(a) $f(x) = xe^{3x+1}$
$f'(x) = x'e^{3x+1} + x\left(e^{3x+1}\right)' = e^{3x+1} + x(3x+1)'e^{3x+1} = e^{3x+1} + 3xe^{3x+1}$.

D'où $f'(x) = e^{3x+1} + 3xe^{3x+1}$.

(b) $g(x) = (\sqrt{x}-2)^4$
$g'(x) = 4 \times (\sqrt{x}-2)' \times (\sqrt{x}-2)^3 = 4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times (\sqrt{x}-2)^3 = \dfrac{2(\sqrt{x}-2)^3}{\sqrt{x}}$.

D'où $g'(x) = \dfrac{2(\sqrt{x}-2)^3}{\sqrt{x}}$.

3. (*) Soit f une fonction définie et dérivable sur $]-2;+\infty[$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé et on donne le tableau de variation suivant :

x	-2		$+\infty$
f	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	-5

Oui la courbe $\mathcal{C}_f$ possède-t-elle des asymptotes.
Précisons ces asymptotes.
D'après le tableau de variation, on a:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -5$ donc la droite d'équation $y = -5$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.

The End.