Saint Sernin

CONTRÔLE 8

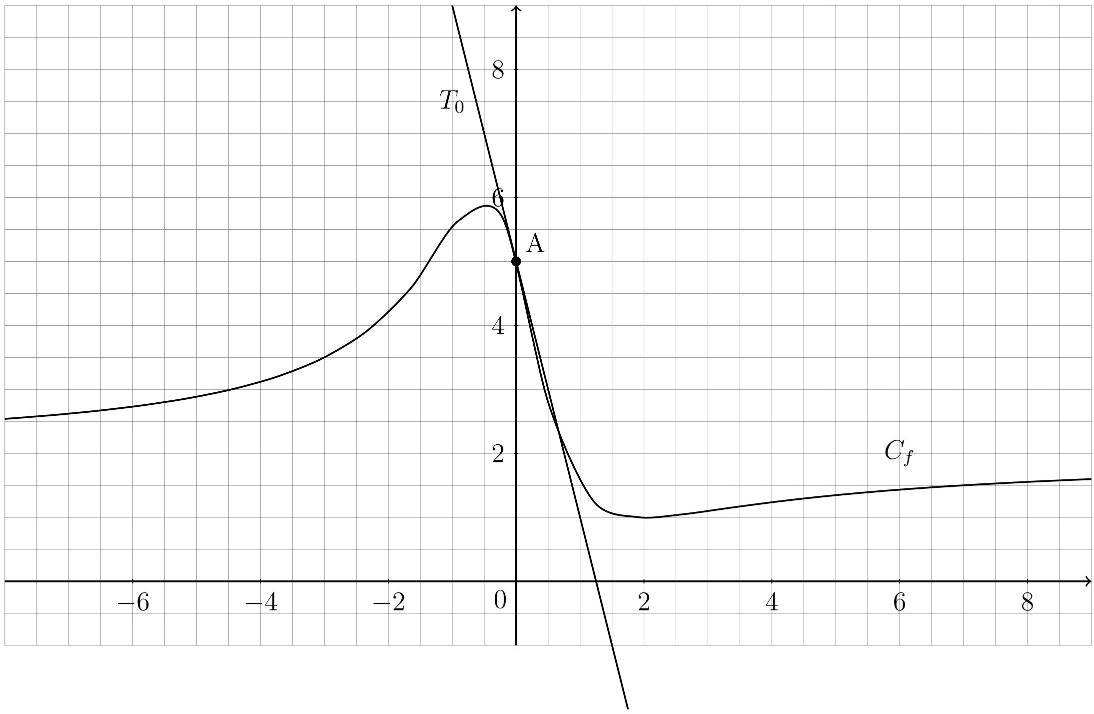
Exercice 1: Etude de fonction

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie par $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 + 1}$$

On a représenté également la tangente à C_f au point d'abscisse 0. (notée T_0)

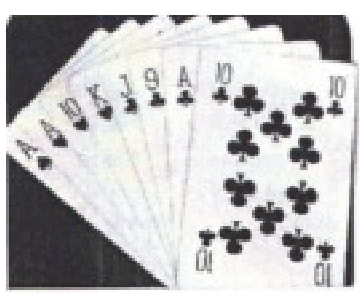
1. Déterminer **par le calcul** les antécédents éventuels de 1 par f.
2. (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Démontrer, que pour tout réel x :
   $$f'(x) = \frac{4x^2 - 6x - 4}{(x^2 + 1)^2}$$
   (c) Calculer $f'(0)$ puis donner l'interprétation graphique du résultat trouvé.
3. (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) Interpréter graphiquement les résultats de la question précédente.
4. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
5. (a) Déterminer l'équation de T_0.
   (b) Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de T_0 avec C_f.



Exercice 2: **Dénombrement**

Un jeu de carte classique comprend 32 cartes différentes.
Un joueur pioche une poignée de huit cartes au début de la partie.

1. Combien y-a-il de tirage de huit cartes possibles?
2. Maya et Valentine disputent une partie : Maya pioche ses huit cartes en premier puis Valentine les siennes ensuite. Combien y-a-il de tirage possibles?
   Un tirage est l'ensemble de toutes les cartes tirées par les deux joueuses.
3. Maya range ses huit cartes dans sa main comme sur la photo ci-dessous.
   Combien y-a-il de rangement possibles?



Exercice 3: **Etude d'une suite**

On considère dans cet exercice la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad ; \qquad u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. Calculer la valeur exacte de u_1 (On détaillera le calcul)
   On considère également la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x}{1+2x}$$

Ainsi on a, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$
*** On **admettra** que f est **strictement croissante** sur $[0; +\infty[$.

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n < u_{n+1} < 1$.
   (*On pourra utiliser l'information ***...*)
   (b) En déduire le sens de variation de (u_n).
   (c) En déduire que (u_n) est convergente. (vers une limite l)

   Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout entier naturel n par :
$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$$
3. (a) Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n :
$$u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$$
   (d) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. **BONUS** Démontrer que la limite l recherchée dans cet exercice est la solution de l'équation $f(x) = x$ puis retrouver la valeur de l.

Exercice 4: **Dénombrement**

Un sac contient cinq boules noires, trois boules blanches et deux boules rouges.
On tire au hasard simultanément trois boules du sac.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles?
2. Combien de tirages sont composés de trois boules noires?
3. Combien de tirages sont constitués de trois boules de couleurs différentes?
4. Calculer la probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur.

The End.