Saint Sernin

CONTRÔLE 8

Exercice 1: Étude de fonction

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie par $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 + 1}$$

On a représenté également la tangente à C_f au point d'abscisse 0. (notée T_0)

1. Déterminons **par le calcul** les antécédents éventuels de 1 par f.
   Soit x_0 un antécédent de 1 par f alors $f(x_0) = 1$.

$$\begin{aligned} f(x_0) = 1 &\Leftrightarrow \frac{2x_0^2 - 4x_0 + 5}{x_0^2 + 1} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2x_0^2 - 4x_0 + 5 = x_0^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow 2x_0^2 - 4x_0 + 5 - x_0^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_0 - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_0 = 2 \end{aligned}$$

   D'où l'antécédent de 1 par f est 2.

2. (a) Justifions que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Soit D_f le domaine de définition de la fonction f.
   $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$
   or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$.
   D'où $D_f = \mathbb{R}$.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

(b) Démontrons, que pour tout réel x : $f'(x) = \dfrac{4x^2 - 6x - 4}{(x^2+1)^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x^2 - 4x + 5)'(x^2+1) - (x^2+1)'(2x^2 - 4x + 5)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(4x-4)(x^2+1) - 2x(2x^2 - 4x + 5)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^3 + 4x - 4x^2 - 4 - 4x^3 + 8x^2 - 10x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 6x - 4}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(c) Calculons $f'(0)$ puis donner l'interprétation graphique du résultat trouvé.

$f'(0) = \dfrac{4(0)^2 - 6 \times 0 - 4}{((0)^2+1)^2} = \dfrac{4 \times 0 - 0 - 4}{(0+1)^2} = \dfrac{-4}{1} = -4$

D'où $f'(0) = -4$.

Par interprétation graphique, -4 est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

3. (a) Déterminons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$D_f = \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2+1} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2} \\ &= \lim_{x \to +\infty} 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2+1} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2} \\ &= \lim_{x \to -\infty} 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

(b) Interprétons graphiquement les résultats de la question précédente.

De ce qui précède on a: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ donc la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Cont.

4. Dressons le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
Étudions le signe de $f'(x)$.
$f'(x) = \dfrac{4x^2 - 6x - 4}{(x^2+1)^2}$
On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x^2+1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le signe du numérateur.
Posons $4x^2 - 6x - 4 = 0$.
Soit Δ le discriminant de cette équation.
$\Delta = (-6)^2 - 4(4)(-4) = 36 + 64 = 100 = 10^2$
$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes:
$x_1 = \dfrac{6-10}{2\times 4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{6+10}{2\times 4} = 2$.
On obtient le tableau de signe et de variation ci-dessous.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 5}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{2\times\frac{1}{4} + 2 + 5}{\frac{1}{4}+1} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{15}{2}\times\frac{4}{5} = 6$$

$$f(2) = \frac{2\times(2)^2 - 4\times 2 + 5}{(2)^2+1} = \frac{8-8+5}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

5. (a) Déterminons l'équation de T_0.
T_0 est la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
D'après la question 2.c) le coefficient directeur de cette droite est -4 donc :
$T_0 : y = -4x + b$, comme T_0 passe par le point $A(0, 5)$ alors on a:
$y_A = -4x_A + b \Leftrightarrow 5 = -4\times 0 + b$ d'où $b = 5$.
Ainsi, $T_0 : y = -4x + 5$.

(b) Déterminons par le calcul les coordonnées des points d'intersection de T_0 avec C_f.
Les points d'intersections de la droite T_0 avec la courbe C_f sont solutions du système d'équation :
$$\begin{cases} y = -4x + 5 & L_1 \\ y = \dfrac{2x^2 - 4x + 5}{x^2+1} & L_2 \end{cases}$$

De L_1 et L_2 on a :

$$\begin{aligned} y = -4x+5 = \frac{2x^2-4x+5}{x^2+1} &\Leftrightarrow (-4x+5)(x^2+1) = 2x^2-4x+5 \\ &\Leftrightarrow -4x^3-4x+5x^2+5 = 2x^2-4x+5 \\ &\Leftrightarrow 4x^3-3x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(4x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

- Pour $x = 0$, $y = -4\times 0+5 \Leftrightarrow y = 5$, on obtient donc le point de coordonnées $(0,5)$.
- Pour $x = \frac{3}{4}$, $y = -4\times\frac{3}{4}+5 = -3+5 = 2$, on obtient ainsi le point coordonnées $\left(\frac{3}{4},2\right)$.

D'où les points d'intersection de la tangente T_0 avec C_f sont :$(0,5)$ et $\left(\frac{3}{4},2\right)$.

Exercice 2: Dénombrement

Un jeu de carte classique comprend 32 cartes différentes.
Un joueur pioche une poignée de huit cartes au début de la partie.

1. Déterminons le nombre de tirage de huit cartes possibles.
   Le nombre de façon de piocher, une poignée de huit cartes au début de la partie parmi 32 cartes différentes non ordonnées correspond à une combinaison de 8 éléments parmi 32.
   $\binom{32}{8} = \dfrac{32!}{8!(32-8)!} = \dfrac{32!}{8!\times 24!} = 10.518.300$
2. Maya et Valentine disputent une partie : Maya pioche ses huit cartes en premier puis Valentine les siennes ensuite. Sachant qu'*un tirage est l'ensemble de toutes les cartes tirées par les deux joueuses.*
   Déterminons le nombre de tirages possibles.
   Le nombre de façon de tirer, un ensemble de 16 cartes parmi 32 cartes différentes non ordonnées correspond à une combinaison de 16 éléments parmi 32.
   $\binom{32}{16} = \dfrac{32!}{16!(32-16)!} = \dfrac{32!}{16!\times 16!} = 601.080.390$
   D'où il y a 601.080.390 tirages possibles.
3. Maya range ses huit cartes dans sa main comme sur la photo ci-dessous.
   Les cartes de Maya étant distinctes et devant être rangé dans un ordre donné alors le nombre de rangement possible de ces dernières correspond à une permutation de 8 éléments. $8! = 40320$
   D'où il y a 40320 rangement possible des cartes de Maya.

Exercice 3: Étude d'une suite

On considère dans cet exercice la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par :

Cont.

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad ; \qquad u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. Calculons la valeur exacte de u_1 (On détaillera le calcul)

$$\begin{aligned} u_1 = u_{0+1} &= \frac{3u_0}{1+2u_0} \\ &= \frac{3 \times \frac{1}{2}}{1 + 2 \times \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{3}{2}}{2} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

D'où $u_1 = \dfrac{3}{4}$.

2. (a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n < u_{n+1} < 1$.
Initialisation:
On a : $\dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4} < 1$ donc $u_0 < u_1 < 1$.
Par conséquent la relation $u_n < u_{n+1} < 1$ est vraie pour $n = 0$.
Hérédité:
Supposons la relation $u_k < u_{k+1} < 1$ vraie pour tout entier naturel $k \geq 0$ et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $k+1$.
La fonction f étant strictement croissante sur $[0, +\infty[$ alors pour tout entier naturel $k \geq 0$ on a:
$f(u_k) < f(u_{k+1}) < f(1)$
Or $f(u_k) = u_{k+1}$, $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$ et $f(1) = \dfrac{3 \times 1}{1 + 2 \times 1} = 1$ alors :
$f(u_k) < f(u_{k+1}) < f(1) \Leftrightarrow u_{k+1} < u_{k+2} < 1$.
Ainsi, la relation est vraie à l'ordre $k+1$.
On conclut donc que pour tout entier naturel n on a bien : $u_n < u_{n+1} < 1$.

(b) Déduisons le sens de variation de (u_n).
De ce qui précède, pour tout entier naturel n on a : $u_n < u_{n+1}$.
On en déduit donc que la suite (u_n) est une suite strictement croissante.

(c) Déduisons que la suite (u_n) est convergente. (vers une limite l)
La suite (u_n) est une suite strictement croissante et à la fois minorée car pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.
Ainsi, la suite (u_n) est bien une suite convergente.

3. (a) Démontrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3.
Calculons $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u}}{1 - \frac{3u_n}{1+2u}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u}}{\frac{1+2u_n-3u_n}{1+2u}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u}}{\frac{1-u_n}{1+2u_n}} = \frac{3u_n}{1-u_n}.$$

Cont.

Alors $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\dfrac{3u_n}{1-u_n}}{\dfrac{u_n}{1-u_n}} = \dfrac{3u_n}{u_n} = 3$.

D'où la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

(b) Déduisons l'expression de v_n en fonction de n.

Le premier terme de la suite (v_n) est $v_0 = \dfrac{u_0}{1-u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

(v_n) étant une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 1 alors $v_n = 1 \times 3^n$.

D'où $v_n = 3^n$.

(c) Déduisons que pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$

On sait que $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$ donc

$$\begin{aligned}
v_n = \frac{u_n}{1-u_n} &\Leftrightarrow v_n(1-u_n) = u_n \\
&\Leftrightarrow v_n - v_n \times u_n = u_n \\
&\Leftrightarrow v_n = u_n + v_n \times u_n \\
&\Leftrightarrow u_n(1+v_n) = v_n \\
&\Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{1+v_n}
\end{aligned}$$

or de ce qui précède, on a $v_n = 3^n$.

Ainsi, $u_n = \dfrac{3^n}{1+3^n}$.

D'où la déduction.

(d) Déterminons la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{1+3^n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\dfrac{1+3^n}{3^n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{3^n}+1} \\
&= 1 \text{ car } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

4. **BONUS** Démontrons que la limite l recherchée dans cet exercice est la solution de l'équation $f(x) = x$ puis retrouvons la valeur de l.

Supposons que l est solution de l'équation $f(x) = x$.

Si l est solution de cette équation $f(x) = x$ alors $f(l) = l$.

$$\begin{aligned} f(l) = l &\Leftrightarrow \frac{3l}{1+2l} = l \\ &\Leftrightarrow 3l = l(1+2l) \\ &\Leftrightarrow 3l = l + 2l^2 \\ &\Leftrightarrow 2l^2 - 2l = 0 \\ &\Leftrightarrow 2l(l-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } l = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, la limite l cherchée est bien solution de l'équation $f(x) = x$.
De la question précédente, on déduit que la limite l cherchée est $l = 1$.

Exercice 4: **Dénombrement**

Un sac contient cinq boules noires, trois boules blanches et deux boules rouges.
On tire au hasard simultanément trois boules du sac.

1. Nombre de tirage possible.
   On effectue au hasard un tirage de façon simultanée trois boules dans un sac contenant des boules donc le nombre de tirage possible correspond à une combinaison de 3 éléments parmi 10.
   $\binom{10}{3} = \dfrac{10!}{3!(10-3)!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 120.$
   D'où il y a 120 tirages possibles.

2. Nombre de tirages composés de trois boules noires.
   Pour effectuer un tirage de trois boules noires il faut que les trois boules tirées soient prises parmi les cinq boules noires dans le sac, ce qui correspond à une combinaison de 3 éléments parmi 5.
   $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 10.$
   D'où il y a 10 tirages possibles composés de trois boules noires.

3. Nombre de tirages constitués de trois boules de couleurs différentes.
   Pour effectuer un tirage de trois boules de couleurs différentes, il faut choisir une boule de couleur noire, une boule de couleur blanche et une boule de couleur rouge. Chacun de ces choix correspond à une combinaison de un élément parmi le nombre de boule disponible par couleur.
   Ainsi, on obtient: $\binom{5}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 5 \times 3 \times 2 = 30$ possibilités.
   D'où il y a 30 tirages possibles constitués de boules de couleurs différentes.

4. Calculons la probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur.
   Soit p la probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur.
   Déterminons d'abord le nombre de tirage qui sont constitués de trois boules de même couleur.
   On obtient un tirage de trois boules de même couleur lorsqu'on choisit trois boules noires ou lorsqu'on choisit les trois boules blanches. (Il ne nous ait pas possible d'avoir trois boules rouges).
   Ainsi, le nombre de tirage constitués de trois boules de même couleur est:

Cont.

$\binom{5}{3} \times \binom{3}{3} = 10 \times 1 = 10$.
De plus, on sait qu'il y a 120 tirages possibles de trois boules de façon simultanée parmi les boules contenues dans le sac.
Par conséquent, $p = \dfrac{10}{120} = \dfrac{1}{12}$.
D'où la probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est $p = \dfrac{1}{12}$.

The End.