Saint Sernin

CONTRÔLE 6

Exercice 1:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ par $f(x) = \dfrac{3x-7}{x-5}$.

1. Calculer les limites suivantes :

   a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} f(x)$ d) $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} f(x)$

2. En déduire des asymptotes à la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 2:

On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n}{n+1}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Exercice 3:

Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. (u_n) est une suite convergente, et ne possède aucun terme nul.
   Affirmation : la suite $(u_n + \dfrac{1}{u_n})$ est convergente.
2. **Affirmation :** Pour un ensemble à 9 éléments, il y a davantage de permutations que 6-uplets.
3. Un groupe de 10 escrimeurs participe à une compétition. Chaque escrimeur doit rencontrer en duel, une et une seule fois, chacun des autres escrimeurs.
   Affirmation : Il faut organiser 45 duels total.

Exercice 4:

Un groupe de plusieurs salles de sport a ouvert en 2020, et 3500 personnes se sont abonnées dès la première année. Chaque année, 20% des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement et 450 nouveaux abonnements sont enregistrés. Le directeur du groupe estime qu'il devra fermer si le nombre d'abonnés devient inférieur à 2300 abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre d'abonnés au cours de l'année $2020+n$. On a donc $a_0 = 3500$.

1. Justifier que pour entier naturel n, $a_{n+1} = 0,8a_n + 450$.
2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $a_n \geq 2250$.
   (b) Démontrer que la suite (a_n) est décroissante.
   (c) En déduire que la suite (a_n) est convergente.
3. On pose pour tout entier naturel n, $b_n = a_n - 2250$
   (a) Montrer que (b_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme b_0.
   (b) En déduire que, pour tout entier n, $a_n = 1250 \times 0,8^n + 2250$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (a_n). Interpréter ce résultat.
4. Le directeur devra-t-il fermer une salle un jour? Si oui, déterminer en quelle année (Justifier).

Exercice 5:

Timothée passe quelques jours dans une capitale européenne. Il est intéressé par 13 musées différents dans cette capitale :

- 8 musées d'art et d'histoire;
- 5 musées scientifiques ou technologiques.

Lors de ce séjour, il n'aura le temps de visiter que 6 musées différents.

1. Dans un premier temps, on s'intéresse au différentes façons de choisir ces 6 musées, sans tenir compte de l'ordre dans lequel Timothée les visitera.
   (a) Calculer le nombre de façons que peut adopter Timothée pour choisir ces 6 musées.
   (b) Combien a-t-il de façon de choisir ces musées de sorte qu'il visite exactement 2 musées d'art et d'histoire?
   (c) Combien a-t-il de façon de choisir ces musées de sorte qu'il visite au moins deux musées scientifiques ou technologiques?
2. On prend maintenant en considération l'ordre dans lequel Timothée visitera ces musées.

(a) On suppose que Timothée a déjà choisi 6 musées.
Combien de façons a-t-il de les ordonner pour organiser les visites?

(b) Timothée a choisi 6 musées et décide d'en visiter un par jour, sauf un jour au cours duquel il en visitera deux. Combien a-t-il de façons d'organiser ces visites en respectant cette contrainte, sans préciser l'ordre des deux musées visités le même jour?

BONUS: **(Pour ceux qui ont traité tous les exercices précédents)**

(u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{3^n}{\sqrt{n!}}$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 15$: $u_{n+1} \leq \dfrac{3}{4} u_n$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 15$: $0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-15} u_{15}$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

The End.