Saint Sernin

CORRECTION CONTRÔLE 6

Exercice 1:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ par $f(x) = \dfrac{3x-7}{x-5}$.

1. Calculer les limites suivantes :

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-7}{x-5} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x\left(1-\dfrac{7}{3x}\right)}{x\left(1-\dfrac{5}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7}{3x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x} = 0 \end{cases} \\
&= \lim_{x\to+\infty} 3 \\
&= 3
\end{aligned}$$

   D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-7}{x-5} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} 3 \\
&= 3
\end{aligned}$$

   D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$.

(c) $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} f(x)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} f(x) &= \lim_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} \frac{3x-7}{x-5} \\
&= \lim_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} \left[(3x-7) \times \frac{1}{x-5}\right] \\
&= 8 \times -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} (3x-7) = 8 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} \dfrac{1}{x-5} = -\infty \end{cases} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} f(x) = -\infty$.

(d) $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} f(x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} f(x) &= \lim_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} \frac{3x-7}{x-5} \\
&= \lim_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} \left[(3x-7) \times \frac{1}{x-5}\right] \\
&= 8 \times +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} (3x-7) = 8 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} \dfrac{1}{x-5} = +\infty \end{cases} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} f(x) = +\infty$.

2. Déduisons-en des asymptotes à la courbe représentative de la fonction f.
De ce qui précède, on a:
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ donc la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f.
De plus on a:
$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 5$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 2:

On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$.

1. Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n}{n+1}$.
Initialisation:
Pour $n = 1$, $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{1} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{1(1+1)} = \dfrac{1}{2}$ et $S_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

Cont.

Ainsi l'égalité $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ est vraie pour $n = 1$.

Hérédité:

Supposons l'égalité $S_m = \dfrac{m}{m+1}$ vraie pour tout entier naturel $m \geq 1$ et montrons que cette égalité est vraie à l'ordre $m+1$.

On a:

$$\begin{aligned}
S_{m+1} &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+1+1)} \\
&= \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \\
&= \frac{m(m+2)+1}{(m+1)(m+2)} \\
&= \frac{m^2+2m+1}{(m+1)(m+2)} \\
&= \frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)} \\
S_{m+1} &= \frac{m+1}{m+2}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'égalité est vérifier à l'ordre $m+1$.

On conclut donc que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a $S_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2. Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} S_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} \text{ car } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \\
&= \lim_{n\to+\infty} 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

Exercice 3:

Disons dans chaque cas si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. **Faux.**
   Si (u_n) est une suite convergente, et ne possède aucun terme nul la suite $(u_n + \frac{1}{u_n})$ n'est pas forcément convergente.
   Considérons la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = \frac{1}{n}$.
   On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n} > 0$.
   Ainsi, u_n est une suite convergente ne possédant aucun terme nul.
   Or $\lim_{n\to+\infty} \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + n\right) = +\infty$.
   Ainsi, la suite $u_n + \frac{1}{u_n}$ n'est pas convergente.
   D'où la justification

2. **Faux.**
   Pour un ensemble à 9 éléments, le nombre de permutations est $9! = 362880$ alors que le nombre de 6-uplets est $9^6 = 531441$.

3. Un groupe de 10 escrimeurs participe à une compétition. Chaque escrimeur doit rencontrer en duel, une et une seule fois, chacun des autres escrimeurs.
   Vraie, Il faut organiser 45 duels total.
   Nous sommes dans un groupe de 10 participant où chaque participant est différent de son concurrent. Une compétition où chaque escrimeur doit rencontrer en duel, une et une seule fois, chacun des autres escrimeurs correspond à une combinaisons de façon non ordonnées de 2 éléments parmi 10 distincts.
   Ainsi, $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{2! \times 8!} = 5 \times 9 = 45$.
   D'où la justification.

Exercice 4:

Un groupe de plusieurs salles de sport a ouvert en 2020, et 3500 personnes se sont abonnées dès la première année. Chaque année, 20% des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement et 450 nouveaux abonnements sont enregistrés. Le directeur du groupe estime qu'il devra fermer si le nombre d'abonnés devient inférieur à 2300 abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre d'abonnés au cours de l'année $2020+n$.
On a donc $a_0 = 3500$.

1. Justifions que pour entier naturel n, $a_{n+1} = 0,8a_n + 450$.
   On sait que chaque année, 20% des abonnés des salles de sport ne renouvellent pas leur abonnement et 450 nouveaux abonnements sont enregistrés. Ainsi, à chaque année il reste seulement 80% des abonnées de l'année précédente auxquels s'ajoutent 450 nouveaux abonnées.
   80% des abonnés de l'année $2020+n$ correspond à $\frac{80 \times a_n}{100} = 0,8a_n$.
   Par conséquent, le nombre d'abonnés de l'année $2020+(n+1)$ correspond à :
   $a_{n+1} = 0,8a_n + 450$

2. (a) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $a_n \geq 2250$.
Initialisation:
Pour $n = 0$ on a : $a_0 = 3500 \geq 2250$
Ainsi, l'inégalité $a_n \geq 2250$ est vraie pour $n = 0$.
Hérédité:
Supposons l'inégalité $a_k \geq 2250$ vraie pour tout entier naturel $k \geq 0$ et montrons quelle est vraie à l'ordre $k + 1$.
On a : $a_{k+1} = 0,8a_k + 450$.
On sait que pour tout $k \geq 0$, $a_k \geq 2250$.

$$\begin{aligned} a_k \geq 2250 &\Leftrightarrow 0,8a_k \geq 0,8 \times 2250 \\ &\Leftrightarrow 0,8a_k \geq 1800 \\ &\Leftrightarrow 0,8a_k + 450 \geq 1800 + 450 \\ &\Leftrightarrow a_{k+1} \geq 2250 \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité est vraie à l'ordre $n + 1$.
On conclut donc que l'inégalité $a_n \geq 2250$ est vraie pour tout entier naturel n.

(b) Démontrons que la suite (a_n) est décroissante.
Étudions le signe de $a_{n+1} - a_n$.
$a_{n+1} - a_n = 0,8a_n + 450 - a_n = 450 - 0,2a_n$.
De ce qui précède, on sait que pour tout entier naturel n, $a_n \geq 2250$.
$a_n \geq 2250 \Leftrightarrow 0,2a_n \geq 0,2 \times 2250 \Leftrightarrow -0,2a_n \leq -450 \Leftrightarrow 450 - 0,2a_n \leq 0$.
Ainsi $a_{n+1} - a_n \leq 0$.
Par conséquent, la suite (a_n) est une suite décroissante.

(c) Déduisons que la suite (a_n) est convergente.
De ce qui précède, la suite (a_n) est une suite décroissante. De plus, pour tout entier naturel n, $a_n \geq 2250$ donc la suite (a_n) est minorée par 2250.
Étant à la fois décroissante et minorée, on conclut donc que la suite (a_n) est une suite convergente.

3. On pose pour tout entier naturel n, $b_n = a_n - 2250$

(a) Montrons que (b_n) est une suite géométrique en précisant sa raison et son premier terme b_0.
Calculons $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{a_{n+1} - 2250}{a_n - 2250} \\ &= \frac{0,8a_n + 450 - 2250}{a_n - 2250} \\ &= \frac{0,8a_n - 1800}{a_n - 2250} \\ &= \frac{0,8(a_n - 2250)}{a_n - 2250} \\ &= 0,8 \end{aligned}$$

$b_0 = a_0 - 2250 = 3500 - 2250 = 1250$.
D'où la suite (b_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $b_0 = 1250$.

Cont.

(b) Déduisons que, pour tout entier n, $a_n = 1250 \times 0,8^n + 2250$.
On sait que $b_n = a_n - 2250$ donc $a_n = b_n + 2250$ or (b_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $b_0 = 1250$ donc $b_n = 1250 \times (0,8)^n$.
Par conséquent, $a_n = 1250 \times (0,8)^n + 2250$.
D'où la déduction.

(c) Déterminons la limite de la suite (a_n).
$0 < 0,8 < 1$ et $\lim_{n\to+\infty} (0,8)^n = 0$ donc
$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (1250 \times (0,8)^n + 2250) = 2250$
Interprétons ce résultat
De ce qui précède, on a $\lim_{n\to+\infty} a_n = 2250$.
a_n étant le nombre d'abonnés au cours de l'année $2020 + n$; nous pouvons dire qu'à partir d'une année donnée, le nombre d'abonnés des salles de sport se rapproche de très près des 2250 abonnés.

4. Oui le directeur devra fermer une salle un jour car de ce qui précède, il y a une année où le nombre d'abonnés deviendra très proche de 2250 abonnés c'est-à-dire inférieure à 2500 abonnés.
Déterminons en quelle année en justifiant.

$$\begin{aligned}
a_n \leq 2500 &\Leftrightarrow 1250 \times (0,8)^n + 2250 \leq 2500 \\
&\Leftrightarrow 1250 \times (0,8)^n \leq 250 \\
&\Leftrightarrow (0,8)^n \leq \frac{250}{1250} \\
&\Leftrightarrow (0,8)^n \leq \frac{1}{5} \\
&\Leftrightarrow \ln(0,8)^n \leq \ln\left(\frac{1}{5}\right) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,8) \leq -\ln(5) \\
&\Leftrightarrow n \leq \frac{-\ln(5)}{0,8} \\
&\Leftrightarrow n \leq 7,2 \\
&\Leftrightarrow n \leq 8 \text{ car n est un entier}
\end{aligned}$$

Pour $n = 8$ on a : $a_8 = 1250 \times (0,8)^8 + 2250 = 2459,7152 < 2500$.
D'où le directeur devra fermer une salle de sport en l'année 2028.

Exercice 5:

Timothée passe quelques jours dans une capitale européenne. Il est intéressé par 13 musées différents dans cette capitale :

- 8 musées d'art et d'histoire;
- 5 musées scientifiques ou technologiques.

Lors de ce séjour, il n'aura le temps de visiter que 6 musées différents.

Cont.

1. Dans un premier temps, on s'intéresse au différentes façons de choisir ces 6 musées, sans tenir compte de l'ordre dans lequel Timothée les visitera.

   (a) Calculons le nombre de façons que peut adopter Timothée pour choisir ces 6 musées.
   L'ordre dans lequel Timothée doit visité les musées n'est pas prise en compte donc le nombre de façons que Timothée peut adopter pour choisir ces 6 musées parmi 13, correspond à une combinaison de 6 éléments parmi 13.
   Ainsi, $\binom{13}{6} = \dfrac{13!}{6!(13-6)!} = \dfrac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 13 \times 11 \times 3 \times 4 = 1716$.
   D'où Timothée a 1716 façons de choisir les 6 musées.

   (b) Donnons le nombre de façon de choisir ces musées de sorte qu'il visite exactement 2 musées d'art et d'histoire.
   Il s'agit de choisir 2 musées d'art et d'histoire parmi les 8 musées d'art et d'histoire puis 4 musées scientifiques ou technologiques parmi les 5 musées scientifiques ou technologiques.
   Le nombre de choix possible est donc: $\binom{8}{2} \times \binom{5}{4}$.
   $\binom{8}{2} = \dfrac{8!}{2!(8-2)!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6!}{2 \times 6!} = 28$ et $\binom{5}{4} = \dfrac{5!}{4!(5-4)!} = \dfrac{5 \times 4!}{4! \times 1!} = 5$
   Ainsi, $\binom{8}{2} \times \binom{5}{4} = 28 \times 5 = 140$.
   D'où il y a 140 possibilité de choisir ces musées de sorte qu'il visite exactement 2 musées d'art et d'histoire.

   (c) Donnons le nombre de façon de choisir ces musées de sorte qu'il visite au moins deux musées scientifiques ou technologiques.
   On compte le nombre de façon de choisir ces musées pour que Timothée visite:

   - exactement 2 musées scientifiques ou technologiques
     Pour cela, il choisit 2 musées scientifiques ou technologies parmi les 5 musées scientifiques ou technologiques puis il choisit les 4 musées restant parmi les 8 musées d'art et d'histoires.
     Cela correspond à $\binom{5}{2} \times \binom{8}{4} = 10 \times 70 = 700$
   - exactement 3 musées scientifiques ou technologiques
     Pour cela, il choisit 3 musées scientifiques ou technologies parmi les 5 musées scientifiques ou technologiques puis il choisit les 3 musées restant parmi les 8 musées d'art et d'histoires.
     Cela correspond à $\binom{5}{3} \times \binom{8}{3} = 10 \times 56 = 560$
   - exactement 4 musées scientifiques ou technologiques
     Pour cela, il choisit 4 musées scientifiques ou technologies parmi les 5 musées scientifiques ou technologiques puis il choisit les 2 musées restant parmi les 8 musées d'art et d'histoires.
     Cela correspond à $\binom{5}{4} \times \binom{8}{2} = 5 \times 28 = 140$
   - exactement 5 musées scientifiques ou technologiques
     Pour cela, il choisit 5 musées scientifiques ou technologies parmi les 5 musées scientifiques ou technologiques puis il choisit les 1 musées restant parmi les 8 musées d'art et d'histoires.
     Cela correspond à $\binom{5}{5} \times \binom{8}{1} = 1 \times 8 = 8$

   Par suite, on fait la somme de ces nombres de façon de choisir ces musées de

sorte qu'il visite au moins deux musées scientifiques ou technologiques: $700 + 560 + 140 + 8 = 1408$.
D'où le nombre de façon de choisir ces musées de sorte que Timothée visite au moins deux musées scientifiques ou technologiques vaut : 1408.

2. On prend maintenant en considération l'ordre dans lequel Timothée visitera ces musées.

(a) On suppose que Timothée a déjà choisi 6 musées.
Donnons le nombre de façons de les ordonner pour organiser les visites.
Les musées à visiter étant choisit et l'ordre de visite étant considéré, le nombre de façons de les ordonner pour organiser des visites correspond à une permutation de ces 6 musées c'est-à-dire $6! = 720$.
D'où le nombre de façons d'ordonner les 6 musées pour organiser les visites est de 720 façons.

(b) Timothée a choisi 6 musées et décide d'en visiter un par jour, sauf un jour au cours duquel il en visitera deux. Le nombre de façons d'organiser ces visites en respectant cette contrainte, sans préciser l'ordre des deux musées visités le même jour correspond au nombre total de permutation des 6 musées divisé par le nombre de permutations entre 2 musées. On trouve donc:
$\dfrac{6!}{2!} = \dfrac{720}{2} = 360$.

<u>BONUS:</u> **(Pour ceux qui ont traité tous les exercices précédents)**

(u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{3^n}{\sqrt{n!}}$.

1. Justifions que, pour tout entier naturel $n \geq 15$: $u_{n+1} \leq \dfrac{3}{4} u_n$.
On a $u_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{3^n \times 3}{\sqrt{(n+1) \times n!}} = \dfrac{3^n}{\sqrt{n!}} \times \dfrac{3}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{n+1}} \times u_n$.
Ainsi, $u_{n+1} = \dfrac{3}{\sqrt{n+1}} \times u_n$.

$$\begin{aligned}
n \geq 15 &\Leftrightarrow n+1 \geq 16 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{n+1} \geq \sqrt{16} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{n+1} \geq 4 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{3}{4} \\
&\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{n+1}} \times u_n \leq \frac{3}{4} u_n \text{ car pour } n \geq 15, u_n > 0 \\
&\Leftrightarrow u_{n+1} \leq \frac{3}{4} u_n
\end{aligned}$$

D'où pour tout entier naturel $n \geq 15$: $u_{n+1} \leq \dfrac{3}{4} u_n$.

Cont.

2. Déduisons que, pour tout entier naturel $n \geq 15$: $0 \leq u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-15} u_{15}$.

   Faisons un raisonnement par récurrence.
   Initialisation:
   Pour $n = 15$ on a $0 \leq u_{15} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{15-15} u_{15} \Leftrightarrow 0 \leq u_{15} \leq u_{15}$.
   Ainsi, l'inégalité est vraie pour $n = 15$.
   Hérédité:
   Supposons l'inégalité $0 \leq u_k \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{k-15} u_{15}$ vraie pour tout entier $k \geq 15$ et montrons quelle est vraie à l'ordre $k+1$.
   De la question précédente, on sait que pour tout entier naturel $n \geq 15$: $u_{n+1} \leq \frac{3}{4} u_n$ donc $u_{k+1} = \frac{3^{k+1}}{\sqrt{(k+1)!}} \leq \frac{3}{4} u_k$.
   D'après l'hypothèse, $0 \leq u_k \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{k-15} u_{15}$ donc $u_{k+1} \leq \frac{3}{4} u_k \leq \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-15} u_{15}$.
   Ainsi, $u_{k+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{(k+1)-15} u_{15}$.
   De même pour tout $k \geq 15$, $u_{k+1} \geq 0$.
   D'où pour tout $k \geq 15$, $0 \leq u_{k+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{(k+1)-15} u_{15}$.
   On conclut donc que l'inégalité $0 \leq u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-15} u_{15}$ est vraie pour tout entier $n \geq 15$.

3. Déduisons la limite de la suite (u_n).

   De ce qui précède, on a pour tout entier $n \geq 15$, $0 \leq u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-15} u_{15}$.
   Or $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-15} u_{15} = 0$ car $0 < \frac{3}{4} < 1$, de plus $\lim_{n \to +\infty} 0 = 0$.
   Par conséquent, d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

The End.