Déodat de séverac

CORRECTION CONTRÔLE 11

Exercice 1:

Déterminons les limites des suites suivantes :

1. $u_n = 1 + \dfrac{100}{n} - 2n^3$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{100}{n} - 2n^3 \\ &= 1 + 0 - \infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{100}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -2n^3 = -\infty \end{cases} \\ &= -\infty\end{aligned}$$

   D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2. $v_n = 3 + \dfrac{\cos n}{n+1}$
   Encadrons l'expression de la suite v_n.
   Pour tout entier naturel n, $n+1 \geq 1$ donc $0 < \dfrac{1}{n+1} \leq 1$.
   De plus, pour tout entier naturel n, $-1 \leq \cos n \leq 1$.
   $-1 \leq \cos n \leq 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{\cos n}{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1} \Leftrightarrow 3 - \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{\cos n}{n+1} \leq 3 + \dfrac{1}{n+1}$.
   Alors on obtient: $3 - \dfrac{1}{n+1} \leq v_n \leq 3 + \dfrac{1}{n+1}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \dfrac{1}{n+1} = 3$
   et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \dfrac{1}{n+1} = 3$
   D'où, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$.

3. $w_n = \dfrac{n+3}{1-2n}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} w_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{1-2n}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}{-2n\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{-2n} \text{ car } \begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0\\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0\end{cases}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2:

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante:

$$u_0 = 1000 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1. (a) Expliquons en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.
On précisera, en particulier, ce que représente u_n.
D'après l'énoncé u_n représente la masse de bactéries produites à un nombre n de jours donnés. Initialement il a été introduit dans la cuve du milieu nutritif 1kg de bactéries, ainsi le masse de bactéries au jour 0 est 1kg=1000g, d'où $u_0 = 1000$.
De plus, on sait qu'à la fin de chaque journée, la masse des bactéries augmente de 20% et durant l'opération de remplacement du milieu nutritif contenu dans la cuve il y a une perte de 100g des bactéries.
u_n étant la masse de bactéries produites à un jour n donné, alors pour trouver la masse de bactéries produites au jour suivant (c'est-à-dire au jour n+1) on ajoutera 20% à la masse initiale des bactéries auquel on soustrait 100g.
Ainsi, $u_{n+1} = u_n + u_n \times \dfrac{20}{100} - 100 = u_n(1+0,2) - 100 = 1,2u_n - 100$.
D'où on a bien $u_{n+1} = 1,2u_n - 100$.
Par conséquent le modèle donné correspond bien à la situation de l'énoncé.

   (b) Complétons l'algorithme ci-contre pour permette à l'entreprise de savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.

```
u=1000
n=0
while u<=30000 :
        u=1.2*u-100
        n=n+1
print (n)
```

2. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

   (a) Démontrons que la suite (v_n) est géométrique en précisant sa raison et son premier terme.
   Calculons $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.
   On a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1,2u_n - 100 - 500 = 1,2u_n - 600$

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{1,2u_n - 600}{u_n - 500}\\ &= \frac{1,2(u_n - 500)}{u_n - 500}\\ &= 1,2\end{aligned}$$

   Et $v_0 = u_0 - 500 = 1000 - 500 = 500$.
   D'où la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,2 et de premier terme 500.

   (b) Montrons que, pour tout entier naturel, $u_n = 500 \times 1,2^n + 500$.
   De ce qui précède, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,2 et de premier terme 500 donc $v_n = 500 \times (1,2)^n$ pour tout entier naturel n.
   On sait que pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$ donc $u_n = v_n + 500$.
   D'où on a bien $u_n = 500 \times (1,2)^n + 500$ pour tout entier naturel n.

   (c) Déterminons la limite de la suite (u_n) et interprétons ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 500 \times (1,2)^n + 500 = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \times(1,2)^n = +\infty$ parce que $1,2 > 1$.
   D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   Dans le contexte de l'exercice on peut retenir que la masse de bactéries augmente au jour le jour.

Exercice 3:

1. Déterminons la dérivée des fonctions suivantes :

   - $f(x) = \sqrt{3-4x}$ sur $\left]-\infty; \frac{3}{4}\right[$.
     Pour tout $x \in \left]-\infty; \frac{3}{4}\right[$,
     $f'(x) = \frac{(3-4x)'}{2\sqrt{3-4x}} = \frac{-4}{2\sqrt{3-4x}}$.
     D'où $f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{3-4x}}$.
   - $g(x) = e^{x^2-3}$ sur $\mathbb{R}$.
     Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (x^2-3)'e^{x^2-3} = 2xe^{x^2-3}$.
     D'où $g'(x) = 2xe^{x^2-3}$

2. Soient deux fonctions u et v telles que $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = 1 - 3x$.

   (a) Exprimons $v \circ u(x)$ en fonction de x.

$$\begin{aligned} v \circ u(x) &= v[u(x)] \\ &= v\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 1 - 3\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 1 - \frac{3}{x} \end{aligned}$$

D'où $v \circ u(x) = 1 - \dfrac{3}{x}$

(b) Exprimons $u \circ v(x)$ en fonction de x.

$$\begin{aligned} u \circ v(x) &= u[v(x)] \\ &= u(1 - 3x) \\ &= \frac{1}{1 - 3x} \end{aligned}$$

D'où $u \circ v(x) = \dfrac{1}{1 - 3x}$

Exercice 4:

Répondons par vrai ou faux en justifiant notre réponse pour chacune des affirmations suivantes.

1. **Vraie**. Si, pour tout entier naturel, on a $u_n \geq \dfrac{n}{4}$ alors la suite (u_n) diverge vers $+\infty$; car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{4} = +\infty$ or pour tout entier naturel n, $u_n \geq \dfrac{n}{4}$ alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
   D'où u_n est bien divergente vers $+\infty$.

2. **Vraie**. Toute suite (v_n) décroissante à termes strictement positifs converge vers 0.
   v_n étant à termes strictement positifs alors $v_n > 0$ pour tout entier n, ainsi la suite v_n est minorée par 0.
   Ainsi, étant à la fois décroissante et minorée par 0 on conclut que la suite v_n converge vers 0.

The End.