Saint Sernin

CONTRÔLE 5

Exercice 1: Limites

Consigne : Dans cet exercice les questions sont indépendantes.

1. Déterminer et rédiger les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{n\to+\infty} -3n^2+6n+5 \quad \text{b) } \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} \quad \text{c) } \lim_{n\to+\infty} \frac{2+n-3n^2}{n^2+1}$$

2. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant :
   (a) Une suite bornée est convergente.
   (b) Une suite qui tend vers $+\infty$ ne peut pas être majorée.

3. Déterminer en justifiant :

$$\lim_{n\to+\infty} 3n+(-1)^n$$

4. (a) **Cours** Rappeler la définition exacte d'une suite convergente vers un réel l.
   (b) Démontrer qu'une suite strictement négative ne peut pas converger vers une limite positive ou nulle.

Exercice 2: Suite auxiliaire

On considère dans cet exercice la suite (u_n) définie pour n entier par :

$$u_0 = 1 \qquad ; \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$$

1. Calculer u_1 et u_2 en détaillant vos calculs.

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n > 0$.
   (b) Démontrer que (u_n) est décroissante.
   (c) Pourquoi peut-on affirmer que (u_n) est convergente?

3. On considère dans cette question la suite (x_n) définie par :

$$x_n = \frac{1}{u_n}$$

   (a) Démontrer que (x_n) est arithmétique.

   (b) En déduire que, pour tout entier n :

$$u_n = \frac{1}{2n+1}$$

   (c) En déduire la limite de (u_n).

Exercice 3: Suites divergente

1. **Cours** - Rappeler la définition d'une suite divergente vers $+\infty$.

2. **Cours** - Soit (u_n) et (v_n) deux suites telle que :

   (a) $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \geq v_n$.

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

   Démontrer qu'alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

   (Démonstration donnée en DHTC...)

3. **Application :**
   On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \qquad ; \qquad u_{n+1} = u_n + 2n + 3$$

   (a) Vérifier que $u_1 = 4$ puis calculer u_2 et u_3.

   (b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

   (c) i. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > n^2$.

   ii. Quelle est la limite de la suite (u_n)? Justifier.

   (d) Au vu des premiers termes de la suite, conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
   Démontrer votre conjecture.
   On pourra utiliser un raisonnement par récurrence...

Exercice 4: Suite arithmético-géométrique

On considère dans cet exercice la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \qquad ; \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}$$

On pose la suite (S_n) telle que, pour tout entier naturel n :

Cont.

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

1. Soit(w_n) la suite définie par $w_n = u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
   (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$u_n = -\frac{3}{2^n} + 3$$
   (d) Étudier la convergence de (u_n).
2. (a) Déterminer le sens de variation de (S_n).
   (b) Démontrer que :
   $$S_n = 3(n+1) - 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$
   Pour cette question, on pourra utiliser la somme des termes d'une suite géométrique...
   (c) En déduire la limite de (S_n).
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même partielle, sera évaluée.*
   Soit (x_n) une suite numérique et (s_n) la suite définie par $s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.
   Dire, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :
   Les suites (x_n) et (s_n) ont le même sens de variation.

Exercice 5: **Running**

Louison s'est constitué un best-of de 80 chansons sur son téléphone.
Lorsqu'elle part faire son jogging, son téléphone choisit au hasard 10 chansons parmi les 80 disponibles pour agrémenter sa course.

1. Combien de choix différents de 10 chansons le téléphone peut-il faire ?
2. Ces 10 chansons sont ensuite enchaînées pour faire une running play-list...

Une fois les 10 chansons choisies par le téléphone, combien de running play-list sont possibles ?

Duel de champions :

Déterminer pour tout $n \geq 1$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n}$$

RAPPEL : $n! = 1 \times 2 \times 3.... \times n$...

The End.