Saint Sernin

CORRECTION CONTRÔLE 5

Exercice 1: Limites

Consigne : Dans cet exercice les questions sont indépendantes.

1. Déterminons les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^2+6n+5$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} -3n^2+6n+5 &= \lim_{n\to+\infty} -3n^2(1-\frac{6n}{3n^2}-\frac{5}{3n^2}) \\
&= \lim_{n\to+\infty} -3n^2(1-\frac{2}{n}-\frac{5}{3n^2}) \\
&= \lim_{n\to+\infty} -3n^2 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{3n^2} = 0 \end{cases} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^2+6n+5 = -\infty$.

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \\
&= 0 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} = 0$.

(c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2+n-3n^2}{n^2+1}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \frac{2+n-3n^2}{n^2+1} &= \lim_{n \to +\infty} \frac{-3n^2\left(1-\dfrac{2}{3n^2}-\dfrac{n}{3n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{-3n^2\left(1-\dfrac{2}{3n^2}-\dfrac{1}{3n}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{-3n^2}{n^2} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{3n^2} = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{3n} = 0 \end{cases} \\
&= \lim_{n \to +\infty} -3 \\
&= -3
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2+n-3n^2}{n^2+1} = -3$

2. Disons si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant :

   (a) Faux.
   Une suite bornée n'est pas forcément convergente car la suite $u_n = (-1)^n$ est une bien une suite bornée mais elle n'est pas convergente.

   (b) Vraie.
   Une suite qui tend vers $+\infty$ ne peut pas être majorée.
   En supposant par l'absurde que la suite est majorée par M, il n'existe aucun entier n tel que, $u_n > M$ ce qui contredit le fait que la suite u_n tend vers $+\infty$.

3. Déterminons en justifiant : $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n + (-1)^n$.
   $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq (-1)^n \leq 1 \Leftrightarrow 3n - 1 \leq 3n + (-1)^n \leq 3n + 1$
   Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (3n-1) = \lim\limits_{n \to +\infty} (3n+1) = +\infty$
   d'où d'après le théorème des gendarmes on a: $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n + (-1)^n = +\infty$.

4. (a) **Cours** Définition exacte d'une suite convergente vers un réel l.
   Une suite convergente vers l est une suite qui a pour limite le nombre réel l.

   (b) Démontrons qu'une suite strictement négative ne peut pas converger vers une limite positive ou nulle.
   Soit (u_n) une suite strictement négative.
   (u_n) est strictement négative donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$.
   Raisonnons par l'absurde:
   Supposons que la suite u_n converge vers une limite $l \geq 0$.
   u_n converge vers $l \geq 0$ donc

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n - l| < \varepsilon$.
$|u_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < u_n - l < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon + l < u_n < \varepsilon + l$.
Ainsi, en prenant ε tel que $0 < \varepsilon < l$ on a $0 < -\varepsilon + l$ donc $0 < -\varepsilon + l < u_n$ ce qui contredit le fait que la suite u_n est strictement négative.
Par conséquent, une suite strictement négative ne peut pas converger vers une limite positive ou nulle.

Exercice 2: Suite auxiliaire

On considère dans cet exercice la suite (u_n) définie pour n entier par :

$$u_0 = 1 \qquad ; \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}$$

1. Calculons u_1 et u_2 en détaillant vos calculs.
   - $u_1 = u_{0+1} = \dfrac{u_0}{1 + 2u_0} = \dfrac{1}{1 + 2 \times 1} = \dfrac{1}{3}$.
   - $u_2 = u_{1+1} = \dfrac{u_1}{1 + 2u_1} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1 + 2 \times \frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{5}$.
2. (a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n > 0$.
   Initialisation:
   $u_0 = 1 > 0$ donc l'inégalité $u_n > 0$ est vraie pour $n = 0$.
   Hérédité:
   Supposons que pour tout entier naturel $k \geq 0$ l'inégalité $u_k \geq 0$ est vraie et montrons quelle est vraie jusqu'à l'ordre $k + 1$.
   On a $u_{k+1} = \dfrac{u_k}{1 + 2u_k}$.

$$\begin{aligned} u_k > 0 &\Leftrightarrow 2u_k > 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + 2u_k > 1 \\ 0 &< \frac{1}{1 + 2u_k} < 1 \\ 0 &< \frac{u_k}{1 + 2u_k} < u_k \\ 0 &< u_{k+1} < u_k \end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $k \geq 0$, $0 < u_{k+1}$.
   On conclut donc que pour tout entier naturel n, on a bien $u_n > 0$.

   (b) Démontrons que (u_n) est décroissante.
   De ce qui précède, pour tout n, $u_n > 0$.

On a : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n}$.

$$\begin{aligned} u_n > 0 &\Leftrightarrow 2u_n > 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + 2u_n > 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1+2u_n} < 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{u_n}{1+2u_n} < u_n \text{ car } u_n > 0 \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite u_n est bien une suite décroissante.

(c) De ce qui précède, pour tout n, on a $u_n > 0$ donc u_n est minorée par 0, de plus la suite u_n est décroissante.
Étant minorée et décroissante, on peut bien affirmé que la suite (u_n) est convergente.

3. On considère dans cette question la suite (x_n) définie par :

$$x_n = \frac{1}{u_n}$$

(a) Démontrons que (x_n) est arithmétique.
On a: $x_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{\dfrac{u_n}{1+2u_n}} = \dfrac{1+2u_n}{u_n}$.
$x_{n+1} - x_n = \dfrac{1+2u_n}{u_n} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1+2u_n-1}{u_n} = 2$.
$x_{n+1} - x_n = 2$.
D'où x_n est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $x_0 = 1$.

(b) Déduisons que, pour tout entier n : $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$.
(x_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $x_0 = 1$ donc $x_n = 2n + 1$.
Or $x_n = \dfrac{1}{u_n}$ alors $u_n = \dfrac{1}{x_n}$.
D'où on a bien $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

(c) Déduisons la limite de (u_n).
On a de ce qui précède, $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n+1} = 0$
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 3: Suites divergente

1. **Cours** - Définition d'une suite divergente vers $+\infty$.
Une suite divergente vers $+\infty$ est une suite admettant comme limite $+\infty$.

2. **Cours** - Soit (u_n) et (v_n) deux suites telle que :

   (a) $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n \geq v_n$.

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

   Démontrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   De (b) on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ donc :
   pour tout réel $A > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel, $v_n > A$.
   Or de (a), pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq v_n$ alors
   pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq v_n > A \Rightarrow u_n > A$ ainsi:
   $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_0, u_n > A$.
   D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. **Application :**
   On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \qquad ; \qquad u_{n+1} = u_n + 2n + 3$$

   (a) Vérifions que $u_1 = 4$ puis calculons u_2 et u_3.

   - $u_1 = u_{0+1} = u_0 + 2 \times 0 + 3 = 1 + 0 + 3 = 4$ donc on a bien $u_1 = 4$.
   - $u_2 = u_{1+1} = u_1 + 2 \times 1 + 3 = 4 + 2 + 3 = 9$ donc $u_2 = 9$.
   - $u_3 = u_{2+1} = u_2 + 2 \times 2 + 3 = 9 + 4 + 3 = 16$ donc $u_3 = 16$.

   (b) Étudions le sens de variation de la suite (u_n).
   On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ donc $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0 \Leftrightarrow 2n \geq 0 \Leftrightarrow 2n + 3 \geq 3$
   Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geq 3 > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$
   D'où $u_{n+1} > u_n$.
   Par conséquent, la suite (u_n) est une suite décroissante.

   (c) i. Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > n^2$.
   Initialisation:
   Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 1$, $0^2 = 0$ et $1 > 0$ donc $u_0 > 0^2$.
   D'où l'inégalité est vérifier pour $n = 0$.
   Hérédité:
   Supposons l'inégalité $u_k > k^2$ vraie pour tout $k \geq 0$ et montrons quelle est vraie à l'ordre $k + 1$.
   On a $u_{k+1} = u_k + 2k + 3$

$$\begin{aligned} u_k > k^2 &\Leftrightarrow u_k + 2k + 3 > k^2 + 2k + 3 \\ &\Leftrightarrow u_{k+1} > k^2 + 2k + 3 > k^2 + 2k + 1 \\ &\Leftrightarrow u_{k+1} > k^2 + 2k + 1 \\ &\Leftrightarrow u_{k+1} > (k+1)^2 \end{aligned}$$

   Ainsi, l'inégalité est vraie à l'ordre $k + 1$.
   D'où l'inégalité $u_n > n^2$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii. Donnons la limite de la suite (u_n) en justifiant.
$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
car de ce qui précède, $u_n > n^2$ or $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.
Ainsi, d'après la propriété de cours qui a été prouvée en 2-) on a: $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(d) Au vu des premiers termes de la suite, conjecturons une expression de u_n en fonction de n.
On a :

- $u_0 = 1 = (0+1)^2$
- $u_1 = 4 = (1+1)^2$
- $u_2 = 9 = (2+1)^2$
- $u_3 = 16 = (3+1)^2$

Ainsi, nous conjecturons que $u_n = (n+1)^2$.

Démontrons notre conjecture.
Faisons un raisonnement par récurrence.
Initialisation:
Pour $n = 0$ on a $u_0 = (0+1)^2 = 1$.
D'où l'égalité est vérifiée pour $n = 0$.
Hérédité:
Supposons l'égalité $u_k = (k+1)^2$ vraie pour tout $k \geq 0$ et montrons quelle est vraie à l'ordre $k+1$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \\ &= (k+1)^2 + 2k + 3 \text{ car } u_k = (k+1)^2 \\ &= k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 \\ &= k^2 + 4k + 4 \\ &= (k+2)^2 \\ &= [(k+1)+1]^2 \end{aligned}$$

Ainsi, l'égalité est vraie à l'ordre $k+1$.
Par conséquent, la conjecture $u_n = (n+1)^2$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4: Suite arithmético-géométrique

On considère dans cet exercice la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \qquad ; \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}$$

On pose la suite (S_n) telle que, pour tout entier naturel n :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

1. Soit(w_n) la suite définie par $w_n = u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Démontrons que (w_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

On a: $w_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} - 3 = \frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2}$.

$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2}}{u_n - 3} = \frac{\frac{1}{2}(u_n - 3)}{u_n - 3} = \frac{1}{2}$.

$w_0 = u_0 - 3 = 0 - 3 = -3$.

D'où (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = -3$.

(b) Déduisons l'expression de w_n en fonction de n.

w_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = -3$ donc

$w_n = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -3 \times \frac{1}{2^n} = -\frac{3}{2^n}$.

D'où $w_n = -\frac{3}{2^n}$.

(c) Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = -\frac{3}{2^n} + 3$.

On sait que $w_n = u_n - 3$ donc $u_n = w_n + 3$ or $w_n = -\frac{3}{2^n}$.

D'où $u_n = -\frac{3}{2^n} + 3$.

(d) Étudions la convergence de (u_n).

Calculons la limite de la suite (u_n).

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{3}{2^n} + 3\right) = 3$

car $\lim_{n\to+\infty} -\frac{3}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} -3\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$.

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$ donc la suite (u_n) est convergente.

2. (a) Déterminons le sens de variation de (S_n).

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

$S_{n+1} = u_0 + u_1 + ... + u_n + u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k$.

$$\begin{aligned}
S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n + u_{n+1} - (u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n) \\
&= u_0 - u_0 + u_1 - u_1 + u_2 - u_2 + ... + u_n - u_n + u_{n+1} \\
&= u_{n+1}
\end{aligned}$$

$$S_{n+1} - S_n = -\frac{3}{2^{n+1}} + 3$$

Pour tout entier naturel n on a:

$$\begin{aligned} 2 \geq 1 &\Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 1^{n+1} \\ &\Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2^{n+1}} \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{n+1}} \leq 1 &\Leftrightarrow -\frac{3}{2^{n+1}} \geq -3 \\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{2^{n+1}} + 3 \geq -3 + 3 \\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{2^{n+1}} + 3 \geq 0 \end{aligned}$$

$S_{n+1} - S_n = -\dfrac{3}{2^{n+1}} + 3 \geq 0$ donc $S_{n+1} \geq S_n$.
D'où la suite (S_n) est croissante.

(b) Démontrons que :

$$S_n = 3(n+1) - 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{3}{2^k} + 3\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} -3\left(\frac{1}{2^k}\right) + \sum_{k=0}^{n} 3 \\ &= -3\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k + 3\sum_{k=0}^{n} 1 \end{aligned}$$

Or $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme 1 donc:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

et $\sum\limits_{k=0}^{n} 1 = n + 1$ d'où

$$\begin{aligned} S_n &= -3 \times 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + 3(n+1) \\ &= 3(n+1) - 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(c) Déduisons la limite de (S_n).

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 3(n+1) - 6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 3(n+1) = +\infty$ et
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 1$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$.
Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty - 6 = +\infty$.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

3. Soit (x_n) une suite numérique et (s_n) la suite définie par $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$.
L'affirmation "les suites (x_n) et (s_n) ont le même sens de variation" est fausse.
Supposons que x_n est une suite croissante et vérifions si s_n l'est aussi.
$s_{n+1} - s_n = \sum\limits_{k=0}^{n+1} x_k - \sum\limits_{k=0}^{n} x_k = u_{n+1}$.
Donc le sens de variation de la suite s_n ne dépend pas du sens de variation de la suite x_n mais plutôt du signe du terme u_{n+1}.
Par exemple:
Considérons la suite $x_n = \frac{3}{2^n} + 1$.
$x_{n+1} - x_n = \frac{3}{2^{n+1}} + 1 - \frac{3}{2^n} - 1 = \frac{3}{2^{n+1}} - \frac{3}{2^n} = \frac{3}{2^{n+1}} - \frac{6}{2^{n+1}} = -\frac{3}{2^{n+1}}$.
Or pour tout entier n, $-\frac{3}{2^{n+1}} < 0$ c'est-à-dire $x_{n+1} - x_n < 0$ donc la suite x_n est décroissante.
Déterminons le sens de variation de la suite $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$.
On a $s_{n+1} - s_n = \sum\limits_{k=0}^{n+1} x_k - \sum\limits_{k=0}^{n} x_k = u_{n+1}$.
Or $u_{n+1} = \frac{3}{2^{n+1}} + 1$ et pour tout entier n, $\frac{3}{2^{n+1}} + 1 > 0$ donc $s_{n+1} - s_n > 0$.
Par conséquent, la suite s_n est croissante.
Ainsi, nous venons d'obtenir une suite x_n décroissante et dont la somme s_n est croissante, ce qui contredit l'affirmation.
D'où l'affirmation est bien fausse.

Exercice 5: Running

Louison s'est constitué un best-of de 80 chansons sur son téléphone.
Lorsqu'elle part faire son jogging, son téléphone choisit au hasard 10 chansons parmi les 80 disponibles pour agrémenter sa course.

1. Le téléphone choisit au hasard 10 chansons parmi les 80 disponibles; les chansons sont prises sans répétition et de façon non ordonnée donc le nombre de choix différents de 10 chansons que le téléphone peut faire correspond à un combinaison de

10 éléments parmi 80 : $\binom{80}{10}$.

$$\begin{aligned}\binom{80}{10} &= \frac{80!}{10!(80-10)!}\\ &= \frac{80\times 79\times 78\times 77\times 76\times 75\times 74\times 73\times 72\times 71\times 70!}{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1\times 70!}\\ &= \frac{80\times 79\times 78\times 77\times 76\times 75\times 74\times 73\times 72\times 71}{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2}\\ &= 79\times 13\times 11\times 76\times 5\times 74\times 73\times 71\\ &= 1.646.492.110.120\end{aligned}$$

D'où il 1.646.492.110.120 choix différents de 10 chansons que le téléphone peut effectué.

2. Pour faire un running play-list, le téléphone fera un réarrangement ordonné et sans répétition des 10 chansons choisies au préalable. Ainsi, le nombre de running play-list possibles des chansons correspond à une permutation des 10 chansons: 10!.
   $10! = 3628800$.
   D'où il y a 3628800 possibilités de constituer une running play-list des 10 chansons choisies.

Duel de champions :

Déterminons pour tout $n \geq 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$

On sait que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\frac{n!}{n^n} > 0$.
On sait aussi que: $n! = 1\times 2\times 3\times ...\times n$ et $n^n = \underbrace{n\times n\times n\times \ldots \times n}_{n\times fois}$.

Donc $\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\frac{3}{n}\times\ldots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n}{n}$.
Or $\frac{k}{n} \leq 1$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$ ainsi;
$\frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\frac{3}{n}\times\ldots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n}{n} \leq \frac{1}{n}\times 1\times 1\times\ldots\times 1\times 1$ donc $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$.
Par conséquent, $0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.
D'où d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

The End.