Emilie de Rodat

CORRECTION CONTRÔLE 3

Exercice 1:

Recopions le **numéro de la question** et **la ou les lettres** correspondant aux réponses choisies.**Aucune justification n'est attendue pour cet exercice,** mais nous justifierons nos choix pour votre compréhension.

1. $\rightarrow D$.
   Pour $n = 2k$ on a $(-1)^n = (-1)^{2k} = 1$ donc $u_n = 5$ ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$
   Et pour $n = 2k+1$ on a $(-1)^n = (-1)^{2k+1} = (-1)^{2k} \times (-1) = -1$ donc $u_n = -5$ ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -5$
   Par conséquent, la suite (u_n) n'a pas de limite.

2. $\rightarrow C$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} v_n &= \lim_{n\to+\infty} n - 5n^2 \\
&= \lim_{n\to+\infty} n(1-5n) \\
&= +\infty \times -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n(1-5n) = -\infty \end{cases} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

   D'où la bonne réponse est bien C.

3. $\rightarrow A$.
   On sait que pour tout entier naturel n, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$.
   $-1 \leq \sin(n) \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq -5\sin(n) \leq 5 \Leftrightarrow n-5 \leq n-5\sin(n) \leq n+5$.
   Donc $n-5 \leq w_n \leq n+5$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n-5 = \lim\limits_{n\to+\infty} n+5 = +\infty$.
   Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$. D'où la bonne réponse est bien A.

4. $\rightarrow$ C et D.

- $P(0) : 0^3 > 3 \times 0 \Leftrightarrow 0 > 0$ Faux
- $P(1) : 1^3 > 3 \times 1 \Leftrightarrow 1 > 3$ Faux
- $P(2) : 2^3 > 3 \times 2 \Leftrightarrow 8 > 6$ Vraie

$P(2)$ est vraie donc la propriété $P(n)$ est vraie lorsque $n = 2$.
Supposons que la propriété est vraie pour tout entier naturel $k \geq 2$ et montrons quelle est vraie pour le rang $k+1$.
$P(k)$: « $k^3 > 3k$ » est vraie pour tout $k \geq 2$.
On a: $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$.

$$\begin{aligned} k \geq 2 &\Leftrightarrow 3k^2 \geq 6k \text{ et } 3k \geq 6 \\ &\Leftrightarrow 3k^2 + 3k \geq 6k + 6 \\ &\Leftrightarrow 3k^2 + 3k \geq 6(k+1). \end{aligned}$$

On a $(k+1)^3 > 3k^2 + 3k \geq 6(k+1) \geq 3(k+1)$ donc $(k+1)^3 \geq 3(k+1)$.
On conclut donc que la propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geq 2$.
D'où C et D sont bien les bonnes réponses.

5. $\rightarrow$ A et C
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a: $2 \leq 3 \Leftrightarrow 3n + 2 \leq 3n + 3 \Leftrightarrow 3n + 2 \leq 3(n+1) \Leftrightarrow \dfrac{3n+2}{n+1} \leq 3$.
Ainsi, la suite (u_n) est majorée par 3.

Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3n+5}{n+2} - \frac{3+2}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)(3n+5) - (n+2)(3n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{3n^2 + 5n + 3n + 5 - (3n^2 + 2n + 6n + 4)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{3n^2 + 8n + 5 - 3n^2 - 8n - 4}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + 1 \geq 1$ et $n + 2 \geq 2$ donc $(n+1)(n+2) \geq 2$.
$(n+1)(n+2) \geq 2 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \dfrac{1}{2}$.
Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, par conséquent la suite (u_n) est une suite croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.
D'où A et C sont bien les bonnes réponses.

6. $\rightarrow$ B.
La suite (a_n) définie telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2n+1} < a_n < \dfrac{3n+1}{n^2+2}$.

On a: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n+1} = 0$ et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+1}{n^2+2} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{n^2} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^2} = 0 \end{cases} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2n+1} < a_n < \dfrac{3n+1}{n^2+2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+1}{n^2+2} = 0$.
D'où d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

7. $\to$ B.
(b_n) est une suite géométrique de premier terme $b_0 = -3$ et de raison $q = \dfrac{1}{4}$ donc
$b_n = -3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ or $0 < \dfrac{1}{4} < 1$
ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} -3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

8. $\to$ C.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = 5^n - 7^n$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} c_n &= \lim_{n\to+\infty} 5^n - 7^n \\
&= \lim_{n\to+\infty} -(7^n - 5^n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} -7^n\left(1 - \frac{5^n}{7^n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} -7^n\left(1 - \left(\frac{5}{7}\right)^n\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} -7^n \text{ car } \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n = 0 \text{ car } 0 < \frac{5}{7} < 1 \\
&= -\infty \text{ car } \lim_{n\to+\infty} 7^n = +\infty
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = -\infty$.

Exercice 2:

Calculons les limites des suites suivantes en utilisant la méthode la plus adaptée.

Cont.

1. $u_n = \dfrac{5n^2 - 3n}{n^2 + 1}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2 - 3n}{n^2 + 1} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2\left(1 - \dfrac{3n}{5n^2}\right)}{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2}{n^2} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n}{5n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{5n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0 \end{cases} \\
&= \lim_{n\to+\infty} 5 \\
&= 5
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.

2. $v_n = \dfrac{(-1)^n + 8}{\sqrt{n}}$.
On sait que pour tout entier naturel n, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

$$\begin{aligned}
-1 \leq (-1)^n \leq 1 &\Leftrightarrow -1 + 8 \leq (-1)^n + 8 \leq 1 + 8 \\
&\Leftrightarrow 7 \leq (-1)^n + 8 \leq 9 \\
&\Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{n}} \leq \frac{(-1)^n + 8}{\sqrt{n}} \leq \frac{9}{\sqrt{n}} \text{ car } \frac{1}{\sqrt{n}} > 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{n}} \leq v_n \leq \frac{9}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{9}{\sqrt{n}} = 0$.
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

3. $w_n = e^n + n^2 + 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} w_n &= \lim_{n\to+\infty} e^n + n^2 + 1 \\
&= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + 1 = +\infty \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

4. $t_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+4}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} t_n &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n+4} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+4})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+4})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+4}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n+4})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+4}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-n-4}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+4}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{-3}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+4}}\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n+4} = +\infty$ et on sait que $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-3}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+4}} = 0$.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$

5. $s_n = 5 + 5 \times \frac{1}{4} + 5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 + ... + 5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
s_n est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $s_0 = 5$ et de raison $q = \frac{1}{4}$.
Donc $s_n = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.
$s_n = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$ or $0 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$.
Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \frac{4}{3}$.

Exercice 3:

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculons u_1 et u_2.
$u_1 = u_{0+1} = 3u_0 - 2 \times 0 + 3 = 3 \times 0 + 3 = 3$ donc $u_1 = 3$.
$u_2 = u_{1+1} = 3u_1 - 2 \times 1 + 3 = 3 \times 3 + 1 = 10$ donc $u_2 = 10$

2. Démontrons par récurrence que, tout entier naturel n, $u_n \geq n$.
Initialisation:
Pour $n = 0$ on a: $u_0 = 0 \geq 0$ qui est vraie.
Donc l'inégalité $u_n \geq n$ est vraie pour $n = 0$.
Hérédité:
Supposons que l'inégalité $u_k \geq k$ est vraie pour tout entier naturel $k \geq 0$ et montrons quelle est vraie à l'ordre $k + 1$.

On a $u_{k+1} = 3u_k - 2k + 3$ et pour tout entier naturel $k \geq 0$;

$$\begin{aligned} u_k \geq k &\Leftrightarrow 3u_k \geq 3k \\ &\Leftrightarrow 3u_k - 2k \geq 3k - 2k \\ &\Leftrightarrow 3u_k - 2k \geq k \\ &\Leftrightarrow 3u_k - 2k + 3 \geq k + 3 \\ &\Leftrightarrow u_{k+1} \geq k + 3 \geq k + 1 \\ &\Leftrightarrow u_{k+1} \geq k + 1 \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité est aussi vraie à l'ordre $k + 1$.
D'où on conclut donc que pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.

3. Déduisons-en que la suite (u_n) est croissante.
   On a: $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3$.
   Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.
   $u_{n+1} - u_n = 2u_n - 2n + 3$.
   De la question précédente, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.

$$\begin{aligned} u_n \geq n &\Leftrightarrow 2u_n \geq 2n \\ &\Leftrightarrow 2u_n - 2n \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2u_n - 2n + 3 \geq 3 \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geq 3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0 \end{aligned}$$

   $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$.
   D'où la suite (u_n) est bien une suite croissante.

4. Déterminons la limite de la suite (u_n).
   On sait que pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$
   On en déduit donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

5. On souhaite déterminer à partir de quel rang $u_n \geq 20000$.
   Rédigeons un algorithme en langage Python permettant de répondre à la question.

```python
# Fonction retournant la valeur de n
def valeurDeN():
        n=0
        u=0
        while (u<20000) :
                u=3*u-2*n+3
                if(u>=20000):
                        return n
                n=n+1

# Test de la fonction
print(valeurDeN())
```

6. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

Cont.

(a) Démontrons que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
On a : $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = u_{n+1} - n$ et

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - n}{u_n - n + 1} \\ &= \frac{3u_n - 2n + 3 - n}{u_n - n + 1} \text{ or } u_{n+1} = u_n - 2n + 3 \\ &= \frac{3(u_n - n + 1)}{u_n - n + 1} \\ &= 3\end{aligned}$$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 3$ donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$.

(b) Déduisons-en que, pour tout entier n, on a : $u_n = 3^n + n - 1$.
La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$ donc $v_n = 1 \times 3^n = 3^n$.
$v_n = 3^n$ or $v_n = u_n - n + 1$ donc
$v_n = u_n - n + 1 \Leftrightarrow 3^n = u_n - n + 1 \Leftrightarrow u_n = 3^n + n - 1$.
D'où on a bien $u_n = 3^n + n - 1$.

(c) Déterminons l'expression de $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de n.
De ce qui précède, on a : $u_n = 3^n + n - 1$ donc

$$\begin{aligned}s_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} 3^k + k - 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} 3^k + \sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 1\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 3^k &= 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^n \\ &= 1 \times \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \\ &= \frac{1 - 3^{n+1}}{-2} \\ &= \frac{3^{n+1} - 1}{2}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{3^{n+1}-1}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\
&= \frac{3^{n+1}-1+n(n+1)-2(n+1)}{2} \\
&= \frac{3^{n+1}-1+(n+1)(n-2)}{2}
\end{aligned}$$

D'où $s_n = \dfrac{3^{n+1}-1+(n+1)(n-2)}{2}$

The End.