Sainte Marie des champs

# CORRECTION CONTRÔLE 1

## Exercice 1: *Étude d'une fonction*

On considère la fonction polynôme du troisième degré $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par:
$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 63$.
On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Calculons la dérivée $f'$ de $f$.
   $f$ est une fonction polynôme alors elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$.

2. Étudions les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.
   Étudions le signe de la fonction $f'(x)$.
   Posons $f'(x) = 0$.
   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$
   Soit $\Delta$ le discriminant de cette équation.
   $\Delta = (2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 4 = 0$.
   $\Delta = 0$ donc l'équation admet une unique solution réelle: $x_0 = \dfrac{-2}{2 \times 1} = -1$.
   Faisons un tableau de signe.

   | $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
   |---|---|---|---|---|---|
   | $x^2 + 2x + 1$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

   Ainsi, la fonction $f$ est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$.

3. Déterminons en quels points de la courbe $\mathcal{C}$ la tangente à la courbe est parallèle à la droite l'équation $y = 3x - 100$.

Soit $A(x_0, y_0)$ ce point et $(T)$ la tangente en $A$ à $\mathcal{C}$.
$(T)$ étant parallèle à la droite d'équation $y = 3x - 100$ alors elles ont le même coefficient directeur donc $f'(x_0) = 3$.

$$\begin{aligned} f'(x_0) = 3 &\Leftrightarrow 3(x_0)^2 + 6x_0 + 3 = 3 \\ &\Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_0(x_0 + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ ou } x_0 = -2 \end{aligned}$$

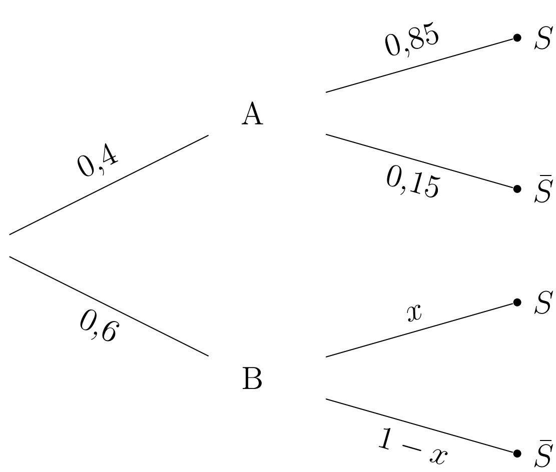
Pour $x_0 = 0$ on a : $f(0) = -63$
Pour $x_0 = -2$ on a: $f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) - 63 = -8 + 12 - 6 - 63 = -65$.
Par conséquent, la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 3x - 100$ aux points de coordonnées $(0, -63)$ et $(-2, -65)$.

## Exercice 2: *Probabilités*

Un libraire dispose d'un stock de magazines. On sait que 40% des magazines provient d'un fournisseur A et le reste d'un fournisseur B. Il constate que 91% des magazines reçus sont vendus dans la semaine. Il constate également que 85% des magazines provenant du fournisseur A sont vendus dans la semaine. Le responsable des achats prend au hasard un magazine dans le stock. On considère les évènements suivants :

- A : « Le magazine provient du fournisseur A. »
- B : « Le magazine provient du fournisseur B. »
- S : « Le magazine est vendu dans la semaine. »

1. On note $P_B(S) = x$.
   Complétons l'arbre pondéré ci-dessous traduisant la situations :




2. Calculons la probabilité que le magazine choisi au hasard provienne du fournisseur A et qu'il soit vendu dans la semaine.
   Il s'agit de calculer la probabilité de l'évènement $A \cap S$.
   On a: $P(A \cap S) = P(A) \times P_A(S)$
   D'après l'arbre pondéré ci-dessus on a :

Cont.

$P(A) = 0,4$ et $P_A(S) = 0,85$ donc
$P(A \cap S) = 0,4 \times 0,85 = 0,34$
D'où $P(A \cap S) = 0,34$.

3. Démontrons que $0,34 + 0,6x = 0,91$ et en déduisons $P_B(S)$.
   Nous savons que 91% des magazines reçus à la fois des fournisseurs $A$ et $B$ sont vendus dans la semaine donc $P(S) = 0,91$.
   D'après la formule des probabilités totales on a :
   $P(S) = P(S \cap A) + P(S \cap B)$ or $P(A \cap S) = 0,34$ et d'après l'arbre pondéré, $P(B \cap S) = 0,6x$.
   D'où $P(S) = 0,6x + 0,34$ c'est-à-dire $0,34 + 0,6x = 0,91$, d'où le résultat.
   Déduisons $P_B(S)$.
   $P_B(S) = x$ donc solution de l'équation $0,34 + 0,6x = 0,91$.
   $0,34 + 0,6x = 0,91 \Leftrightarrow 0,6x = 0,91 - 0,34 \Leftrightarrow x = 0,95$.
   D'où $P_B(S) = 0,95$

4. Le magazine choisi est vendu dans la semaine. Calculons la probabilité, arrondie à $10^{-3}$, qu'il provienne du fournisseur B.
   Il s'agit de calculer la probabilité de l'évènement B sachant que l'évènement S est réaliser c'est-à-dire $P_S(B)$.
   $P_S(B) = \dfrac{P(B \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,6 \times 0,95}{0,91} = 0,626.$
   D'où $P_S(B) = 0,626$.

## Exercice 3: *Suites numériques*

D'après l'ADEME (Agence De l'Environnement et de la Maîtrise de l'Énergie), chaque français a produit une masse moyenne de 365 kg de déchets ménagers en 2018.
Un maire, étant informé que la masse moyenne en déchets ménagers dans sa commune en 2018 était de 400kg par habitant, décide d'une compagne annuelle de sensibilisation au recyclage qui conduit à une réduction de cette production de 1,5% par an, et cela dès l'année 2019.
On modélise alors la masse moyenne de déchets ménagers par habitant calculée en fin d'année dans cette commune par une suite $(d_n)$ où pour tout entier naturel $n$, $d_n$ correspond à la masse moyenne de déchets ménagers par habitant, en kg, pour l'année $2018+n$.
Ainsi $d_0 = 400$.

1. Prouvons que $d_1 = 394$.
   $d_1$ est la moyenne de déchets produite par habitant en l'année 2019.
   Sachant que le production de déchets diminue de 1,5% par an on a:
   $d_1 = d_0 - \dfrac{1,5 \times d_0}{100} = 400 - \dfrac{1,5 \times 400}{100} = 400 - 6 = 394$

   Interprétons ce résultat.
   En l'année 2019, la masse moyenne de déchets produits par habitant est de $394kg$.

2. Déterminons la nature de la suite $(d_n)$ en précisant sa raison et son premier terme.
   On a de ce qui précède, $d_1 = d_0 - \dfrac{1,5d_0}{100} = d_0 - 0,015d_0 = (1 - 0,015)d_0$
   Donc $d_1 = 0,985d_0$.

Cont.

D'où la suite $(d_n)$ est une suite géométrique de premier terme $d_0 = 400$ et de raison $q = 0,985$.

3. Exprimons $d_n$ en fonction de $n$.
   $(d_n)$ étant une suite géométrique alors : $d_n = d_0 \times q^n$.
   D'où $d_n = 400 \times (0,985)^n$.
   Déduisons la masse moyenne, arrondie à l'unité, de déchets ménagers par habitant pour l'année 2022.
   Pour l'année 2022 on a:
   2022=2018+4 donc $n = 4$
   Pour n=4 on a : $d_4 = 400 \times (0,985)^4 = 377$.
   Ainsi la masse moyenne de déchets ménagers par habitant pour l'année 2022 est de 377kg.

4. A l'aide de la calculatrice, déterminons en quelle année la masse moyenne de déchets ménagers par habitant deviendra inférieure à 365kg.
   On sait que la masse moyenne de déchets en 2022 est de 377kg donc on peut effectuer le calcul à partir de l'année 2023.
   Ainsi, en l'année 2023 on a : $d_5 = 400 \times (0,985)^5 = 370,887 > 365$.
   En l'année 2024 on a: $d_6 = 400 \times (0,985)^6 = 365,323 > 365$.
   En l'année 2025 on a: $d_7 = 400 \times (0,985)^7 = 359,843 < 365$.
   D'où la masse moyenne de déchets par habitant deviendra inférieure à 365kg en l'année 2025.

# Bonus:

Écrivons une fonction Python qui retourne l'année à laquelle la masse moyenne de déchets ménagers par habitant de la commune devient inférieure à 365kg.

```python
# Fonction retournant l'annee ou la masse moyenne
# est superieure a 365
def masseAnnee():
        N=0
        d=400
        while (d>365) :
                d=400*pow(0.985,N)
                if(d<365):
                        return 2018+N
                N=N+1

# Test de la fonction
print(masseAnnee())
```

The End.