PRODUIT SCALAIRE

Propriété:

Pour tout vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan et tout réel k,

1. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

2. $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Propriété: Formules des normes

Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan on a:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$

2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right)$

3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right)$

Conséquence:

Dans un triangle ABC, la deuxième formules des normes peut s'appliquer de la manière suivante: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{AC}||^2 - ||\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}||^2\right) = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - CB^2\right)$

Exemple:

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ lorsque $AB = 5$, $AC = 4$ et $CB = 3$.

©Cours Galilée *Toute reproduction, même partielle, est strictement interdite.*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-CB^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(5^2+4^2-3^2\right)\\ &= \frac{1}{2}(25+16-9)\\ &= 16\end{aligned}$$