Lycée Saint Sernin

CORRECTION CONTRÔLE 12

Exercice 1 :

1) Comparons $A = \sqrt{3} - 3$ et $B = \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$

On a : $\sqrt{3} < 3$ soit $\sqrt{3} - 3 < 0$

Donc A est strictement négatif

$\sqrt{12 - 6\sqrt{3}} > 0$ car la racine carrée d'un nombre est toujours positif

alors B est strictement positif.

Par suite,

$$\boxed{A < B}$$

2) Comparons $C = (a+1)(b+1)$ et $D = ab + 1$

$$\begin{aligned} C - D &= (a+1)(b+1) - (ab+1) \\ &= ab + a + b + 1 - ab - 1 \\ C - D &= a + b \end{aligned}$$

Or $a < 0$ et $b < 0$ alors $a + b < 0$

$a + b < 0 \Rightarrow C - D < 0$

D'où

$$\boxed{C < D}$$

3) Comparons $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

On a : $\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1^n}{3^n} = \frac{1}{3^n}$

De la même manière, on trouve : $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}}$

Or $\forall n \in \mathbb{Z}$, $3^{n+1} > 3^n$ alors $\frac{1}{3^{n+1}} < \frac{1}{3^n}$

Soit $\left(\frac{1}{3}\right)^n > \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

4) Comparons $E = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ et F=2.

$$\begin{aligned}
E - 2 &= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \\
&= \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} - \frac{2ab}{ab} \\
&= \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} \\
E - 2 &= \frac{(a-b)^2}{ab}
\end{aligned}$$

$\forall$ a,b négatifs, $(a-b)^2 > 0$ et $ab > 0$ soit $\frac{(a-b)^2}{ab} > 0$

Par suite, $E - 2 > 0 \Rightarrow E > 2$

D'où

$$\boxed{E > F}$$

5) Donnons un encadrement de $2 - 3x$ sachant que $-4 \leq x \leq 5$

$$\begin{aligned}
-4 \leq x \leq 5 &\Rightarrow 3 \times -4 \leq 3x \leq 3 \times 5 \\
&\Rightarrow -12 \leq 3x \leq 15 \\
&\Rightarrow -15 \leq -3x \leq 12 \\
&\Rightarrow -15 + 2 \leq 2 - 3x \leq 12 + 2 \\
-4 \leq x \leq 5 &\Rightarrow -13 \leq 2 - 3x \leq 14
\end{aligned}$$

Exercice 2 :

Complétons le tableau

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$2x - 8$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x + 1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{2x-8}{(-x+1)(x+2)}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$		$-$	

Résolvons l'inéquation $\dfrac{2x-8}{(-x+1)(x+2)} > 0$

Soit S l'ensemble solution de cette inéquation

$$\boxed{S = \left]-2;1\right[\cup \left[4;+\infty\right[}$$

Exercice 3 :

Déterminons la quantité de chocolat que doit produire Charlie pour que la production soit rentable.
Pour cela, étudions le signe de $B(x)$

$$\begin{aligned}
B(x) = 0 \ &\Rightarrow \ (-x+20)(x-50) = 0 \\
&\Rightarrow \ (-x+20) = 0 \ \text{ ou } \ (x+50) = 0 \\
B(x) = 0 \ &\Rightarrow \ x = 20 \ \text{ ou } \ x = -50
\end{aligned}$$

x	0		20		50		60
$-x+10$		$+$	0	$-$		$-$	
$x - 50$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour $x \in \left]20;50\right[$ on a : $B(x) > 0$

La production est donc rentable pour x compris entre 20 et 50

Exercice 4 :

Avec Mystère(3 ;1) le programme retourne 16.

Explication

On a : $a = 3$ et $b = 1$ au début du programme.

Ensuite, le programme entre dans la boucle 'for'. Là, k prend des valeurs successives allant de 1 à 5.

— pour $k = 1$, on a : $b = a + b = 3 + 1 = 4$

— pour $k = 2$, on a : $b = a + b = 3 + 4 = 7$

— pour $k = 3$, on a : $b = a + b = 3 + 7 = 10$

— pour $k = 4$, on a : $b = a + b = 3 + 10 = 13$

— pour $k = 5$, on a : $b = a + b = 3 + 13 = 16$

Puis le programme retourne la valeur actuelle de b qui est 16.

Exercice 5 :

1-a) La fonction g est décroissante

Justification

Soit x_1 et x_2 deux réels tels que : $x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} g(x_1) - g(x_2) &= -2x_1 + 10 - (-2x_2 + 10) \\ &= -2x_1 + 10 + 2x_2 - 10) \\ g(x_1) - g(x_2) &= 2(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Or $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$

Soit $g(x_1) - g(x_2) > 0 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$

Donc $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$

On déduit donc que g est décroissante

b) Traçons la courbe C_g

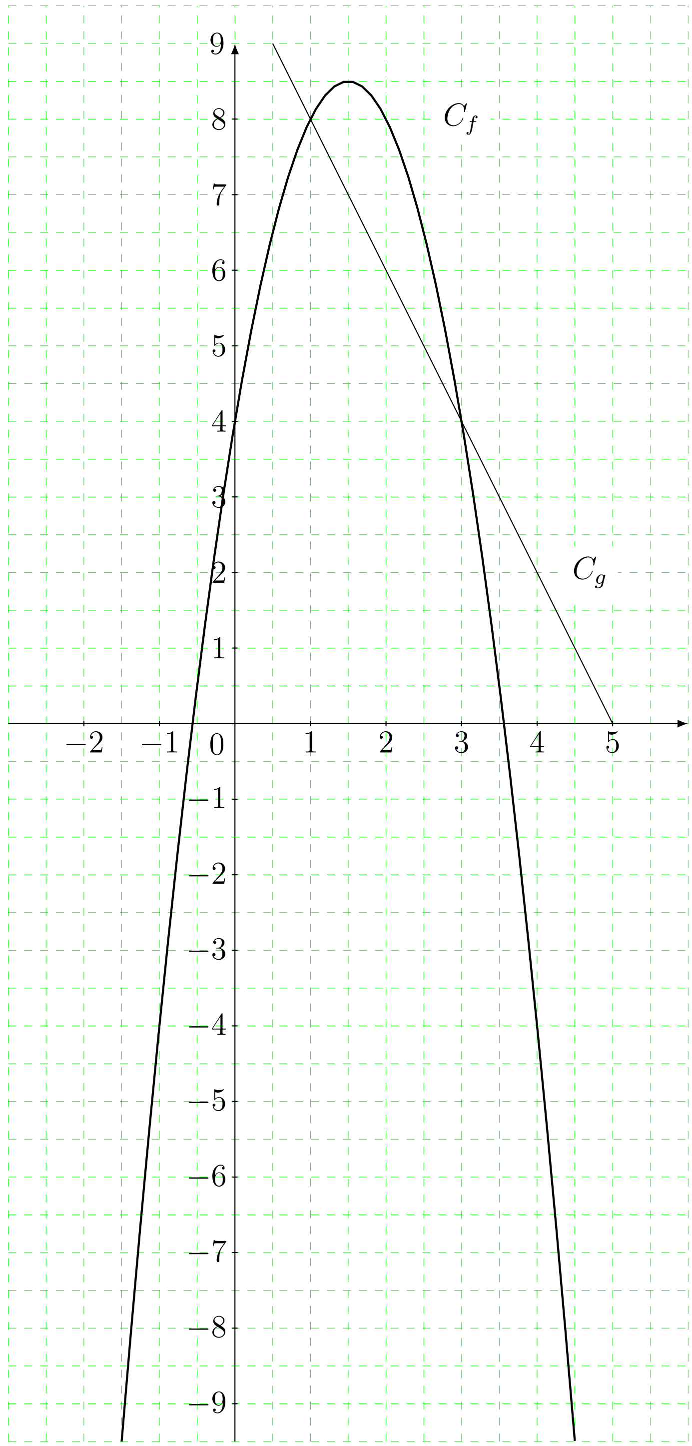
C_g est une droite

Posons $g(x) = y$

$g(x) = y \Rightarrow y = -2x + 10$

Le coefficient directeur de cette droite est $a = -2$

	A	B
x	5	1
y	$\frac{1}{2}$	9



c) Résolvons graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$

$$\boxed{S =]1\,;3[}$$

2-a) Montrons que $f(x) - g(x) = (-2x+6)(x-1)$

$$
\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= -2x^2 + 2x + 6x - 6 \\
&= -2x^2 + 8x - 6 \\
&= -2\left[\left(x + \frac{8}{2(-2)}\right)^2 - \frac{8^2 - 4(-2)(-6)}{4(-2)^2}\right] \\
&= -2[(x-2)^2 - 1] \\
&= -2[(x-2-1)(x-2+1)] \\
&= -2(x-3)(x-1) \\
f(x) - g(x) &= (-2x+6)(x-1)
\end{aligned}
$$

b) Résolvons l'inéquation $f(x) > g(x)$

Étudions le signe de $f(x) - g(x)$ et dégageons de cette étude les réels pour lesquelles $f(x) - g(x) > 0$

Pour ce faire, posons : $f(x) - g(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
f(x) - g(x) = 0 &\Rightarrow (-2x+6)(x-1) = 0 \\
&\Rightarrow (-2x+6) = 0 \text{ ou } (x-1) = 0 \\
&\Rightarrow 2x = 6 \text{ ou } x = 1 \\
&\Rightarrow x = \frac{6}{2} \text{ ou } x = 1 \\
f(x) - g(x) = 0 &\Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 1
\end{aligned}
$$

x	-∞		1		3		+∞
$-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Du tableau, on déduit que l'inéquation $f(x) > g(x)$ à pour solution :

$$\boxed{S =]1\,;3[}$$

Exercice Bonus :

Cont.

Comparons les nombres $C = \dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ et $D = \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$.

On a : $\sqrt{7} > \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{7}-\sqrt{3} > 0$ alors $\left(\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\right) > 0$

Or $2 > 0$ par suite, $C > 0$.

De plus $D > 0$

Écrivons C sans racine carée au dénominateur.

$$\begin{aligned}
C &= \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \\
&= \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} \\
&= \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2} \\
&= \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} \\
&= \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4} \\
C &= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

On remarque que :

$$\boxed{\text{C=D}}$$

Alors les expressions C et D sont égaux

The End.