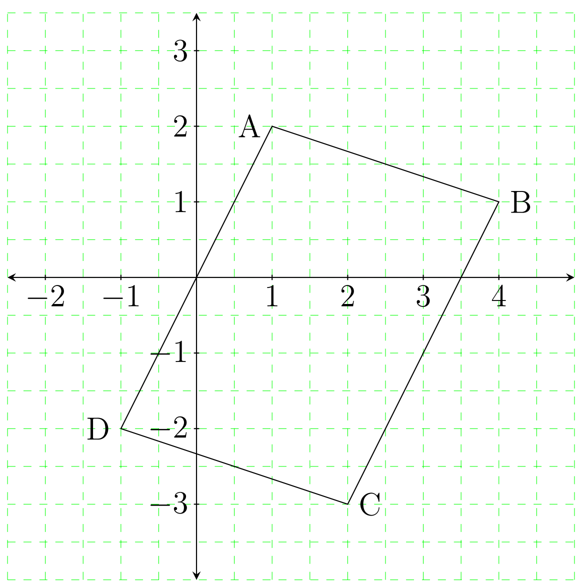
CORRECTION CONTRÔLE 11

Exercice 1 :

Représentons le parallélogramme ABCD



1) Démontrons que ABCD est un parallélogramme

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B & - & x_A \\ y_B & - & y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & - & 1 \\ 1 & - & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} x_C & - & x_D \\ y_C & - & y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & - & (-1) \\ -3 & - & -(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On constate que :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}}$$

On déduit donc que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

2) Démontrons que A,D et E sont alignés

Pour le faire, il faut et il suffit que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DE}$ soit colinéaires.

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} x_D & - & x_A \\ y_D & - & y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & - & 1 \\ -2 & - & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} x_E & - & x_D \\ y_E & - & y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & - & (-1) \\ 14 & - & (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$
Calculons det($\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{DE}$)

det($\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{DE}$)=-2(16)-8(-4)
det($\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{DE}$)=0

Alors les points A,D et E sont alignés.

3) Déterminons les coordonnées de F

On sait que F est le milieu du segment [CD] alors F(x_F, y_F) avec :

$$x_F = \frac{x_C + x_D}{2} \text{ et } y_F = \frac{y_C + y_D}{2}$$

$x_F = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$

$y_F = \frac{-3+(-2)}{2} = -\frac{5}{2} = -2.5$

$$\boxed{\text{F(0.5 , -2.5)}}$$

4) Vérifions si les droites (AF) et (EB) sont parallèles

$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} x_F & - & x_A \\ y_F & - & y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & - & 1 \\ -2.5 & - & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -4.5 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} x_B & - & x_E \\ y_B & - & y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & - & 7 \\ 1 & - & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -13 \end{pmatrix}$
Il n'existe pas de réel k tels que :
$$\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{EB}$$

Alors les droites (AF) et (EB) ne sont pas parallèles

5) Calculons $||\overrightarrow{AG}||$ et $||\overrightarrow{CG}||$

$$\begin{aligned}
||\overrightarrow{AG}|| &= \sqrt{(x_G - x_A)^2 + (y_G - y_A)^2} \\
&= \sqrt{(9-1)^2 + (1-2)^2} \\
&= \sqrt{64+1} \\
||\overrightarrow{AG}|| &= \sqrt{65}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
||\overrightarrow{CG}|| &= \sqrt{(x_G - x_C)^2 + (y_G - y_C)^2} \\
&= \sqrt{(9-2)^2 + (1-(-3))^2} \\
&= \sqrt{7^2 + 4^2} \\
&= \sqrt{49+16} \\
||\overrightarrow{CG}|| &= \sqrt{65}
\end{aligned}$$

On a : $||\overrightarrow{AG}|| = ||\overrightarrow{CG}||$

Alors le point G appartient à la médiatrice du segment [AC]

6) Calculons les coordonnées du point H

Par hypothèse, on a :$\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} &\Rightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \\
&\Rightarrow \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AO} \\
\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} &\Rightarrow \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{OA}
\end{aligned}$$

De la question 1 précédente on a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} x_E & - & x_A \\ y_E & - & y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & - & 1 \\ 14 & - & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

alors

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OH} &= 2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{OH} &= \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ soit

$$\boxed{H\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

Exercice 2 :

Déterminons toutes les valeurs de k pour lesquelles (AB) et (CD) soient parallèles

1ère méthode :

det($\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$)=[(k-1)(k-1)-16]

det($\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$)=$(k-1)^2-16$

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si det($\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$)=0

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=0 &\Rightarrow (k-1)^2-16=0 \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcr} k-1 &=& 4 \\ k-1 &=& -4 \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} k=5 \\ k=3 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

2ème méthode :

(AB) et (CD) sont parallèles s'il existe un réel k' tel que : $\overrightarrow{AB}=k'\overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} x_B & - & x_A \\ y_B & - & y_A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & - & 1 \\ 3 & - & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix} x_D & - & x_C \\ y_D & - & y_C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & - & 4 \\ k & - & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ k-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}=k'\overrightarrow{CD} &\Rightarrow \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix}=k'\begin{pmatrix} 8 \\ k-1 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcr} k-1 &=& 8k' \\ 2 &=& k'(k-1) \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcll} k &=& 8k'+1 & \text{ⓐ} \\ k &=& \frac{(2+k')}{k'} & \text{ⓔ} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

En posant une égalité entre les résultats trouvés pour k on a : $8k'+1=\frac{(2+k')}{k'}$

$$\begin{aligned}
8k'+1=\frac{(2+k')}{k'} &\Rightarrow k'(8k'+1)=2+k' \\
&\Rightarrow 8k'^2+k'=2+k' \\
&\Rightarrow 8k'^2-2=0 \\
&\Rightarrow (k'\sqrt{8})^2-(\sqrt{2})^2=0 \\
&\Rightarrow (k'\sqrt{8}-\sqrt{2})(k'\sqrt{8}+\sqrt{2})=0 \\
&\Rightarrow (k'\sqrt{8}-\sqrt{2})=0 \text{ ou } (k'\sqrt{8}+\sqrt{2})=0 \\
&\Rightarrow k'\sqrt{8}=\sqrt{2} \text{ ou } k'\sqrt{8}=-\sqrt{2} \\
&\Rightarrow k'=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} \text{ ou } k'=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} \\
&\Rightarrow k'=\frac{\sqrt{16}}{8} \text{ ou } k'=-\frac{\sqrt{16}}{8} \\
&\Rightarrow k'=\frac{4}{8} \text{ ou } k'=-\frac{4}{8} \\
8k'+1=\frac{(2+k')}{k'} &\Rightarrow k'=\frac{1}{2} \text{ ou } k'=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Remplaçons les valeurs de k' dans l'expression ⓐ

- Pour $k'=\frac{1}{2}$ on a :

$$\begin{aligned}
k &= 8k'+1 \\
&= 8\left(\frac{1}{2}\right)+1 \\
&= 4+1 \\
k &= 5
\end{aligned}$$

- Pour $k'=-\frac{1}{2}$ on a :

$$\begin{aligned}
k &= 8k'+1 \\
&= 8\left(-\frac{1}{2}\right)+1 \\
&= -4+1 \\
k &= -3
\end{aligned}$$

Les valeurs de k pour lesquelles (AB) et (CD) sont parallèles sont :

$$\boxed{k \in \{-3;5\}}$$

Exercice 3 :

1) Calculons le prix TTC de cet article

$$\begin{aligned}
\text{TTC} &= \text{HT} + \text{TVA} \times \text{HT} \\
&= 140 + 140 \times 19.6\% \\
&= 140 + 27.44 \\
\text{TTC} &= 167.44
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{TTC} = 167.44 \text{ €}}$$

2) Déterminons l'évolution en pourcentage de l'action Apple entre ces deux dates

L'évolution en dollars est :

$\text{E}_{vd} = 300.35$ \$US - 264.16 \$US
$\text{E}_{vd} = 36.19$ \$US

L'évolution en pourcentage est donc :

$\text{E}_{vp} = \frac{100 \times 36.19}{264.16}$

$$\boxed{\text{E}_{vp} = 13.70\%}$$

Donc entre ces deux dates, l'action Apple a augmenté de 13.70%

3) Déterminons le prix avant la réduction

$$\begin{aligned}
\text{Prix} &= 360 + 360 \times 20\% \\
&= 360 + 72 \\
\text{Prix} &= 432
\end{aligned}$$

Le prix avant la réduction est donc : $\boxed{432 \text{ €}}$

4) Déterminons le pourcentage global d'évolution

Soit x le prix initial du produit à 20% de hausse, le nouveau prix est :

$$\begin{aligned}
x_1 &= x + \frac{20}{100}x \\
x_1 &= x + 0.2x
\end{aligned}$$

À 30% de baisse on a un nouveau prix

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 - \frac{30}{100}x_1 \\
&= x + 0.2x - 0.3(x + 0.2x) \\
&= x + 0.2x - 0.3x - 0.06x \\
x_2 &= x - 0.16x
\end{aligned}$$

Cont.

À 10% de baisse on a :

$$\begin{aligned} x_3 &= x - 0.16x - 0.1(x - 0.16x) \\ &= x - 0.16x - 0.1x - 0.016x \\ &= x - 0.244x \\ x_3 &= x - (24.4\%)x \end{aligned}$$

De tout ce qui précèdent, on retient que le prix du produit a connu une baisse de 24.4%

5) Trouvons la valeur de x

Soit a le nombre initiale de fréquentation de la salle de sport

À 20% de baisse le nombre de fréquentation de la salle de sport devient :

$$\begin{aligned} a_1 &= a - \frac{20}{100}a \\ a_1 &= a - 0.2a \end{aligned}$$

À x% de baisse ce nombre devient :

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 - \frac{x}{100}a_1 \\ &= a - 0.2a - \frac{x}{100}(a - 0.2a) \\ &= a - 0.2a - \frac{(x \times a)}{100} - \frac{(0.2 \times a \times x)}{100} \\ &= a - \left(0.2 + \frac{x}{100} + \frac{0.2x}{100}\right) \\ &= a - a\left(\frac{20 + x + 0.2x}{100}\right) \\ a_2 &= a - a\left(\frac{1.2x + 20}{100}\right) \end{aligned}$$

Par hythosèse on a :

$$a_2 = a - a\left(\frac{42}{100}\right)$$

De ces deux expressions de a_2 on a :

$$\frac{1.2x + 20}{100} = \frac{42}{100}$$

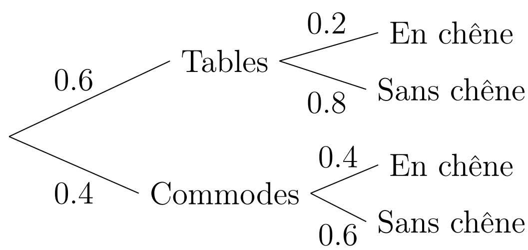
Soit

$$\begin{aligned} 1.2x + 20 = 42 &\Rightarrow 1.2x = 42 - 20 \\ &\Rightarrow 1.2x = 22 \\ &\Rightarrow x = \frac{22}{1.2} \\ 1.2x + 20 = 42 &\Rightarrow x = 18.33\% \end{aligned}$$

La valeur de x est donc : $\boxed{18.33\%}$

Exercice 4 :

Illustrons le contexte par un schéma



L'an dernier, l'ébéniste a donc vendu 60% de table et 40% de commodes, sachant que 20% des tables et 40% des commodes sont en chêne. Le pourcentage de chaque article en chêne vendu l'an dernier est donc :

- Tables

$$0.6 \times 0.2 = 0.12$$

- Commodes

$$0.4 \times 0.2 = 0.08$$

Donc le pourcentage des meubles (Tables , Commodes) en chêne vendu l'an dernier est :

$$\boxed{P = 0.12 + 0.08}$$

The End.