CORRECTION CONTRÔLE 6

Exercice 1 :

Donnons la liste des diviseurs positifs de 36

$$\begin{aligned}
36 &= 1 \times 36 \\
36 &= 2 \times 18 \\
36 &= 3 \times 12 \\
36 &= 4 \times 9 \\
36 &= 6 \times 6
\end{aligned}$$

Les diviseurs positifs de 36 sont : $\boxed{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}$

Exercice 2 :

Indiquons justification à l'appui pour chaque application si elle est vrai ou fausse

1) Faux, car pour n=16 on a :

$$\frac{8}{16} = 0.5$$

0.5 étant un nombre décimal alors $\frac{8}{n}$ n'est pas un nombre entier

2) Vraie

Si n est divisible par 8 alors on a :

$$n = 8 \times p$$

$$\begin{aligned}
n = 8p \quad &\Rightarrow \quad n = 4 \times 2 \times p \\
&\Rightarrow \quad n = 4 \times q \ avec\ q = 2p
\end{aligned}$$

D'où n est un multiple de 4

3) Faux

Prenons l'exemple des nombres premiers 3 et 5
On a : $3 + 5 = 8$
8 admet plus de 2 diviseurs alors 8 n'est pas un nombre premier

Exercice 3 :

Décomposons 3388 et 840 en produits de nombres premiers

$$\begin{array}{c|c} 3388 & 2 \\ 1694 & 2 \\ 847 & 7 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$\boxed{3388 = 2 \times 2 \times 7 \times 11 \times 11}$$

$$\begin{array}{c|c} 840 & 2 \\ 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 5 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\boxed{840 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 3 \times 7}$$

- Déduisons l'écriture de $\frac{3388}{840}$ sous forme de fraction irréductible

$$\begin{aligned}\frac{3388}{840} &= \frac{2\times 2\times 7\times 11\times 11}{2\times 2\times 2\times 5\times 3\times 7}\\ &= \frac{11\times 11}{2\times 5\times 3}\\ \frac{3388}{840} &= \frac{121}{30}\end{aligned}$$

La forme irréductible de la division de 3388 par 840 est donc :

$$\boxed{\frac{3388}{840}=\frac{121}{30}}$$

Exercice 4 :

Vérifions justification à l'appui si les nombres suivants sont des nombres premiers

• 1287 et 239

$\sqrt{1287} = 35.874$ et $\sqrt{239} = 15,459$

Connaissant la racine carrée de ces deux nombres on aura donc a essayer de les divisés par tous les nombres premiers compris entre 1 et leur racine carrée respective.

Ceci étant, on remarque que chacun d'eux admet exactement deux diviseurs : 1 et le nombre lui-même

On conclut donc que 1287 et 239 sont tous deux des nombres premiers

• 289

On a : $\sqrt{289} = 17$

De ce résultat, on remarque que :

$$\boxed{289 = 17\times 17}$$

De ce fait, on dira donc que 289 admet un autre diviseur(17) autre que 1 et lui-même

Par suite, il n'est donc pas un nombre premier

Exercice 5 :

1) Montrons que la somme de deux multiples de 5 est un multiple de 5

Soient "p" et "q" deux multiples de 5, alors on a :

$p = 5m$ et $q = 5n$ avec m $\in \mathbb{N}$ et n $\in \mathbb{N}$ les quotients respectifs de la division de p et q

$$\begin{aligned} p+q &= 5m+5n \\ &= 5(m+n) \\ p+q &= 5r \ avec \ r=(m+n) \end{aligned}$$

p+q étant égal à 5r alors la somme de deux multiples de 5 est un multiple de 5

2) Montrons que la somme de trois entiers consécutifs est divisible par 3

Soient n, n+1 et n+2 trois entiers consécutifs, alors on a :

$$\begin{aligned} n+(n+1)+(n+2) &= 3n+3 \\ &= 3(n+1) \\ n+(n+1)+(n+2) &= 3m \ \ avec \ m=(n+1) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{n+(n+1)+(n+2)=3m}}$$

D'où la somme de 3 entiers consécutifs est un multiple de 3

3) Montrons que si n est impair alors 4 est un diviseur de n^2+2n+5

Soit n=2m+1 un nombre impair (m $\in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} n^2+2n+5 &= (2m+1)^2+2(2m+1)+5 \\ &= 4m^2+4m+1+4m+2+5 \\ &= 4m^2+8m+8 \\ &= 4(m^2+2m+2) \\ n^2+2n+5 &= 4r \ \ avec \ \ r=4(m^2+2m+2) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\boxed{n^2+2n+5=4r}$$

On peut donc dire que si n est impair, n^2+2n+5 est divisible par 4.

Exercice 6 :

1-a) Écrivons la contraposée de la proposition

Si un nombre est impair, alors son carrée est impair

b) Montrons que cette contraposée est vraie

Soit n un nombre impair, alors il existe m $\in \mathbb{Z}$ tel que : n=2m+1

$$\begin{aligned} n = 2m+1 \Rightarrow n^2 &= (2m+1)^2 \\ &= 4m^2+4m+1 \\ &= 2(2m^2+2m)+1 \\ n = 2m+1 \Rightarrow n^2 &= 2q+1 \ \ avec \ \ q = (2m^2+2m) \end{aligned}$$

$$\boxed{n = 2m+1 \Rightarrow n^2 = 2q+1}$$

D'où si un nombre est impair alors son carrée est impair

2-a) Écrivons la réciproque de l'implication

Si un nombre est pair alors son carrée est pair

b) Vérifions justification à l'appui si la réciproque est vraie

Oui, la réciproque est vraie

Justification

Soit 2n un nombre pair avec $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 2n^2 &= 4n^2 \\ &= 2 \times 2n^2 \\ 2n^2 &= 2m \ \ avec \ \ m = 2n^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{2n^2 = 2m}$$

On conclut donc que le carrée d'un nombre pair est un nombre pair.

Exercice Bonus Hors-barème :

Les entiers naturels admettant exactement trois diviseurs sont les carrées des nombres premiers. Autrement dit, si n est un entier naturel admettant exactement trois (03) diviseurs, alors il existe un nombre premier P tel que :

$$\boxed{n = p^2}$$

Exemple : 4, 9, 25, 49, 121, etc