DÉRIVATION ET ÉTUDE DE FONCTIONS

Définition:

Soient I un intervalle ouvert et c un réel de I. On considère une fonction f définie sur I. Dire que $f(c)$ est un **maximum local** (respectivement **minimum local**) de f au voisinage de c signifie qu'il existe deux réels a et b dans I tels que $c \in]a,b[$ et , pour tout réel x de $]a,b[$, $f(x) \leq f(c)$ (respectivement $f(x) \geq f(c)$). Un extremum local est un maximum ou un minimum local.

Remarque:

On dit que $f(c)$ est un maximum global sur I lorsque pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(c)$. On définit de façon analogue un minimum global.

Propriété:

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et c un réel de I.

1. Si $f(c)$ est un extremum local de f, alors $f'(c) = 0$
2. Si f' s'annule en c en changeant de signe, alors $f(c)$ est un extremum local de f.

Méthode et exemple:

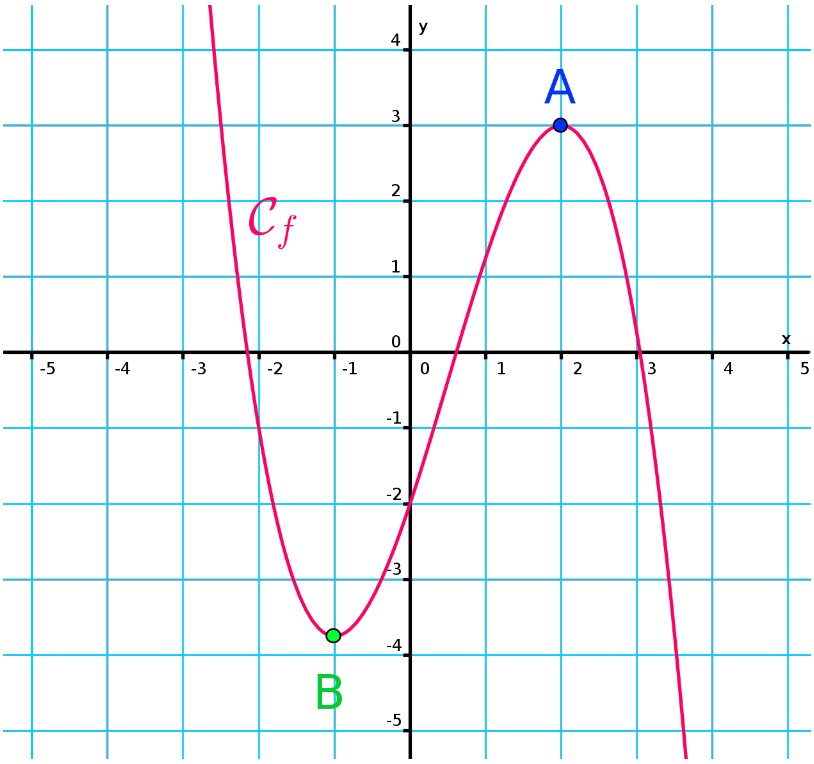
Pour déterminer les extremums d'une fonction :

1. **Graphiquement**

   a. on regarde où se trouvent les changements de variations ;

   b. la valeur d'un extremum se lit sur l'axe des ordonnées.

Le graphe ci-dessous représentant la courbe représentative d'une fonction f admet 3 pour maximum local au point A et $-3,75$ pour minimum local au point B.



2. Algébriquement

a. on vérifie que la fonction est dérivable et on calcule sa dérivée ;

b. on détermine les valeurs de x pour lesquelles la dérivée s'annule en changeant de signe ;

c. on en déduit les extremums en cherchant les images des valeurs obtenues à l'étape précédente.

La fonction $f(x) = x^2 - 2x + 5$ est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de fonction dérivée $f'(x) = 2x - 2$. La dérivée f' s'annule pour $x = 1$ et on a le tableau de signe ci-dessous:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	

La fonction f' s'annule en 1 en changeant de signe donc la fonction f admet en 1 un extremum local.

Faisons le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variation de f ci-dessus, la fonction f admet un minimum global en 1 ayant pour valeur 4.