DÉRIVATION ET ÉTUDE DE FONCTIONS

Théorème:

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.

- Si f' est strictement positive sur I, sauf pour un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I, sauf pour un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

Méthode et exemple:

Pour étudier les variations d'une fonction sur intervalle son domaine de définition:

1. on justifie qu'elle est dérivable;

2. on détermine sa fonction dérivée ;

3. on étudie le signe de la dérivée ;

4. on en déduit le sens de variation de la fonction.

La fonction $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$ est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée $f'(x) = 6x + 2$.
La dérivée $f'(x)$ s'annule pour $x = -\dfrac{1}{3}$ et on a le tableau de signe ci-dessous:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$, $f'(x) < 0$; donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$.
De plus, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$, $f'(x) > 0$; donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

Théorème:

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.

- Si f est croissante sur I, alors f' est positive sur I.
- Si f est décroissante sur I, alors f' est négative sur I.
- Si f est constante sur I, alors f' est nulle sur I.

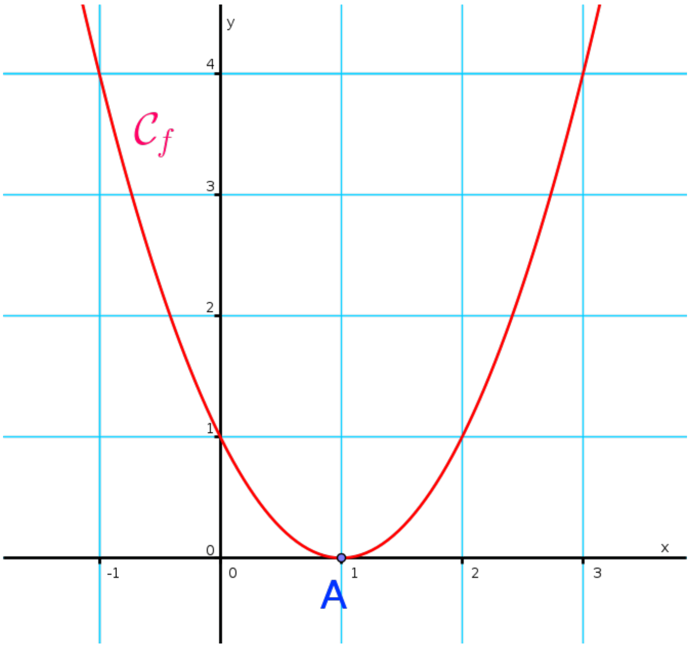
Méthode et exemple:

Pour déterminer le signe de la dérivée à partir du sens de variation :

1. on détermine les intervalles sur lesquels la fonction est croissante et les intervalles sur lesquels elle est décroissante ;

2. Si la fonction est croissante (respectivement décroissante) alors la dérivée est positive (respectivement négative).

La courbe représentative ci-dessous est celle d'une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$.



La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ et strictement croissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
Par conséquent la fonction dérivée f' de f est strictement négative sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ et strictement positive sur l'intervalle $]1, +\infty[$.