# TRIGONOMÉTRIE (II)

**Définition:**

La fonction **cosinus** est la fonction qui, à tout réel $x$, associe $\cos(x)$.
Elle est une fonction paire.
La fonction **sinus** est la fonction qui, à tout réel $x$, associe $\sin(x)$.
Elle est une fonction impaire.
Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont des **sinusoïdes**.

**Propriété:**

- La fonction cosinus étant paire, sa courbe représentative admet comme axe de symétrie l'axe des ordonnées.
- La fonction sinus étant impaire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère $O$.

**Méthode et Exemple:**

Pour montrer qu'une fonction $f$ définie sur $D_f$, donnée en fonction de sinus et/ou de cosinus est paire ou impaire il faut:

- montrer que pour tout $x \in D_f$, on a: $-x \in D_f$,
- calculer $f(-x)$ et le comparer à $f(x)$,
- si $f(-x) = f(x)$ alors $f$ est une fonction paire,
- si $f(-x) = -f(x)$ alors $f$ est une fonction impaire.

**Déterminons la parité de la fonction $f(x) = x^2 \cos(x) + 3$.**
La fonction $f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et on sait que:

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.
Calculons $f(-x)$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2\cos(-x)+3 \\ &= x^2\cos(x)+3 \text{ car } \cos(-x)=\cos(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

D'où la fonction $f$ est une fonction paire.

**Propriété:**

Les fonctions cosinus et sinus son périodiques de période $2\pi$. Autrement dit, pour tout réel $x$, $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$ pour tout $k$ appartenant à $\mathbb{Z}$.

**Méthode et Exemple:**

Pour montrer qu'une fonction $f$ définie sur $D_f$, donnée en fonction de sinus et/ou de cosinus est périodique de période $T$ il faut:

- montrer que pour tout $x \in D_f$, on a: $x+T \in D_f$,
- calculer $f(x+T)$, et simplifier son expression en utilisant les formules trigonométriques,
- montrer que $f(x+T) = f(x)$.

Montrons que $f(x) = \cos(2x)\sin(x)$ est périodique de période $2\pi$.
La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x+2\pi \in \mathbb{R}$.
Calculons $f(x+2\pi)$.

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \cos(2x+2\pi)\sin(x+2\pi) \\ &= \cos(2x)\sin(x) \text{ car } \cos(a+2\pi)=\cos(a) \text{ et } \sin(a+2\pi)=\sin(a) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

D'où la fonction $f$ est périodique de période $2\pi$.

 

**Propriété:**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
Si $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$, alors $f$ et $g$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin(x)$ et $g'(x) = \cos(x)$.

**Propriété:**

Soient $a$ et $b$ deux réels quelconques.
En notant $f : x \mapsto \cos(ax+b)$ et $g : x \mapsto \sin(ax+b)$, alors $f$ et $g$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = -a\sin(ax+b)$ et $g'(x) = a\cos(ax+b)$.

**Exemple:**

Calculons la dérivée des fonctions $f(x) = \sin(x) + \cos(2x+3)$ et $g(x) = \cos(x) + \sin(2x+3)$.

- $f'(x) = (\sin(x))' + (\cos(2x+3))' = \cos(x) - 2\sin(2x+3)$
  D'où $f'(x) = \cos(x) - 2\sin(2x+3)$
- $g'(x) = (\cos(x))' + (\sin(2x+3))' = -\sin(x) + 2\cos(2x+3)$
  D'où $g'(x) = -\sin(x) + 2\cos(2x+3)$