DÉRIVATION ET ÉTUDE DE FONCTIONS

Définition:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est dérivable sur un intervalle I lorsque f est dérivable en tout réel a de I. On appelle dérivée de f la fonction qui, à tout réel x de I, associe le réel $f'(x)$. On la note f'.

Propriété:

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f de domaine de dérivabilité D'_f et de fonction dérivée f'. On a:

Fonction f	D_f	**Fonction dérivée** f'	D'_f
$f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$

Exemple:

- La fonction $f(x) = -5x^4 + 3x^2 + 7$ est une fonction polynôme alors elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée:
  $f'(x) = -5 \times 4x^{(4-1)} + 3 \times 2x^{(2-1)} + 0 = -20x^3 + 6x^1$.
  D'où $f'(x) = -20x^3 + 6x$
- La fonction $g(x) = -\dfrac{2}{x}$ est une fonction inverse alors elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de fonction dérivée: $g'(x) = -2 \times \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.
  D'où $g'(x) = \dfrac{2}{x^2}$

Propriété:

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
k, a et b sont des réels.

Fonction	Fonction dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$k \times u$	$k \times u'$
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
$\sqrt{u}$ avec $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n avec $n \in \mathbb{Z}$	$n \times u' \times u^{n-1}$
$\dfrac{1}{v(x)}$ avec $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$\dfrac{-v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$\dfrac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$

Exemple:

- La fonction $f(x) = (3x+5)(x-2)$ est un produit de deux fonctions polynômes dérivables sur $\mathbb{R}$ alors elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x+5)'(x-2) + (3x+5)(x-2)' \\ &= 3(x-2) + (3x+5) \times 1 \\ &= 3x - 6 + 3x + 5 \\ &= 6x - 1 \end{aligned}$$

D'où $f'(x) = 6x - 1$

- La fonction $g(x) = \dfrac{3x+5}{x-2}$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

La fonction g est le quotient de deux fonctions polynômes et dont le dénominateur ne s'annule pas sur son domaine de définition; donc la fonction g est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(3x+5)'(x-2) - (x-2)'(3x+5)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{3(x-2) - 1 \times (3x+5)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{3x - 6 - 3x - 5}{(x-2)^2} \\ &= \frac{-11}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

D'où $g'(x) = \dfrac{-11}{(x-2)^2}$