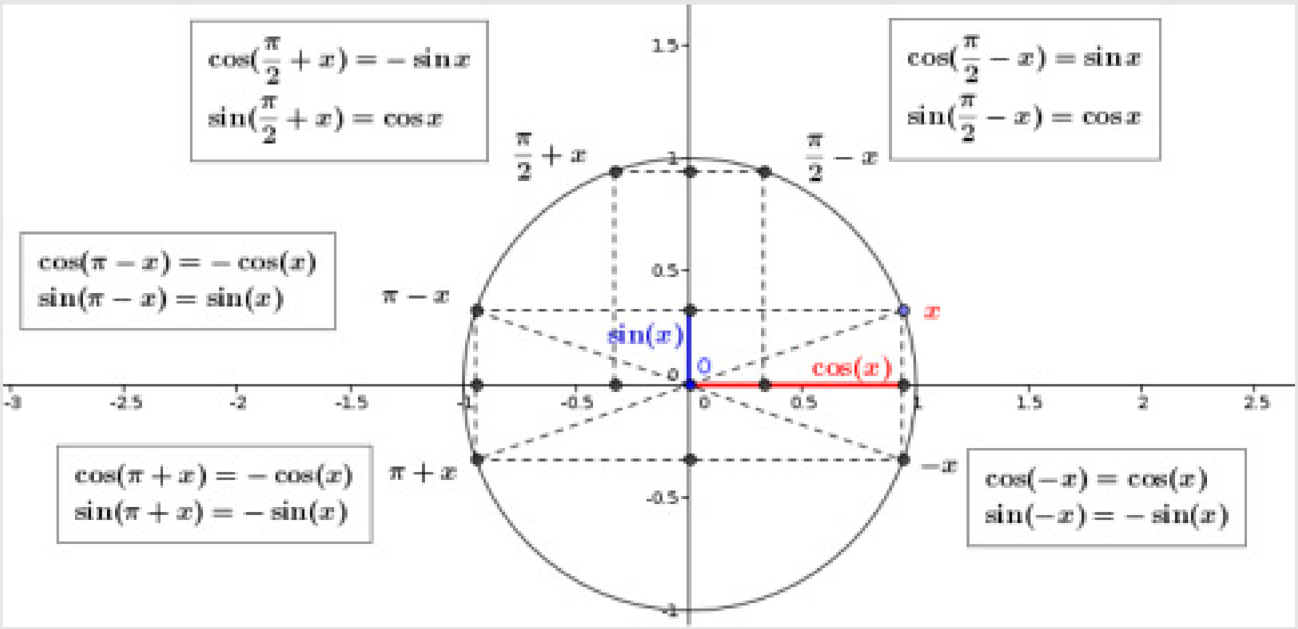
TRIGONOMÉTRIE (II)

Rappel:



Propriété: Équation trigonométriques

Soient x et a deux réels et $k \in \mathbb{Z}$ on a:

- $\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ et $x = \pi - a + 2k\pi$.
- $\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ et $x = -a + 2k\pi$.

Méthode:

1. Pour résoudre une équation de la forme $\sin(x) = b$ ou $\cos(x) = b$ il faut:

- transformer l'équation sous l'une des formes connues : $\sin(x) = \sin(a)$ ou $\cos(x) = \cos(a)$

- puis résoudre l'équation obtenue en se servant des formules de la propriété ci-dessus.

2. Pour résoudre une inéquation de la forme $\sin(x) \leq b$, $\cos(x) \leq b$, $\sin(x) < b$, $\cos(x) < b$ ou $\sin(x) \geq b$ ...
Il faut :

- résoudre d'abord l'équation de la forme $\sin(x) = b$ ou $\cos(x) = b$
- puis utiliser le cercle trigonométrique pour déterminer la partie solution de l'inéquation.

Exemple:

- Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : 2\sin(x) - \sqrt{3} = 0$.

$$\begin{aligned}
2\sin(x) - \sqrt{3} = 0 &\Leftrightarrow \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Soit S l'ensemble solution de l'équation (E).

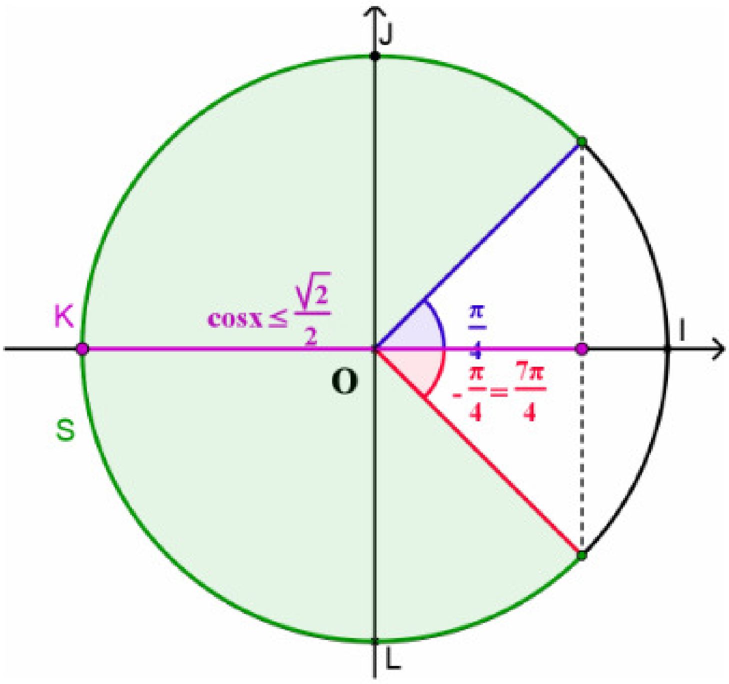
$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

- Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $\cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Posons $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\begin{aligned}
\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Soit S l'ensemble solution de l'inéquation.



En faisant une lecture sur le cercle trigonométrique ci-dessus, et comme $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi = 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ on a:

$$S = \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right] \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$