TRIGONOMÉTRIE (II)

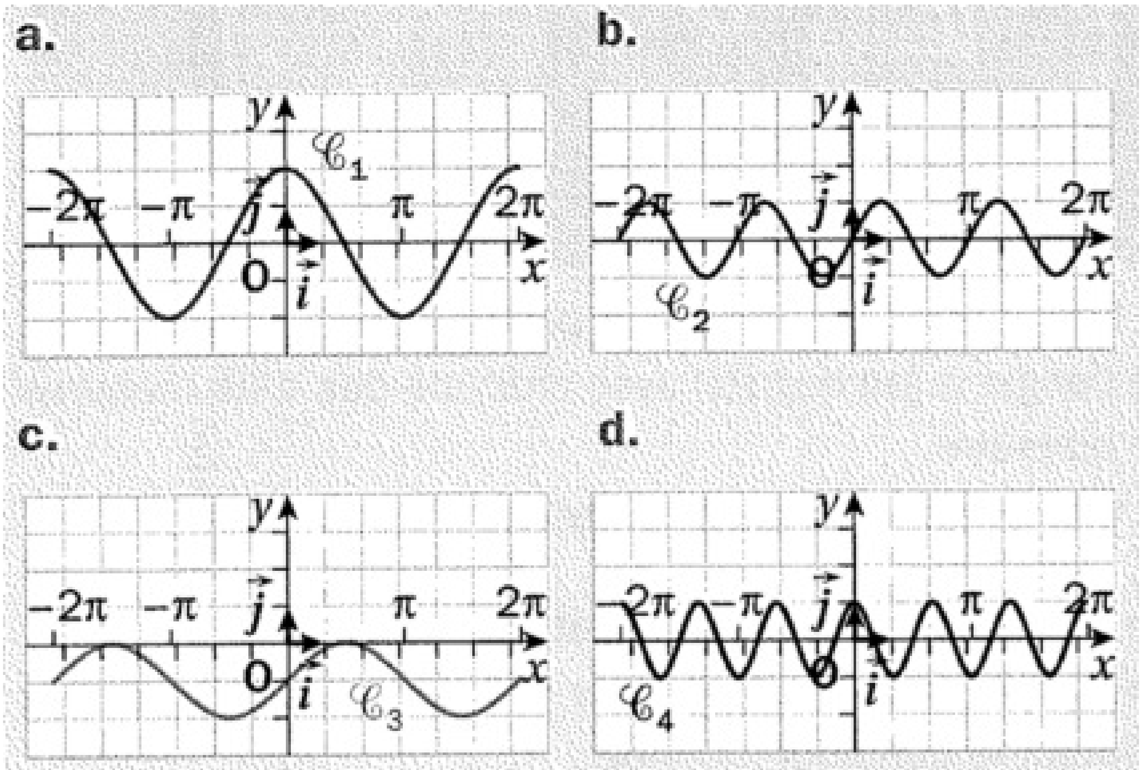
EXERCICES

ÉTUDES DE FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Exercice 1 :

Les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ sont respectivement les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

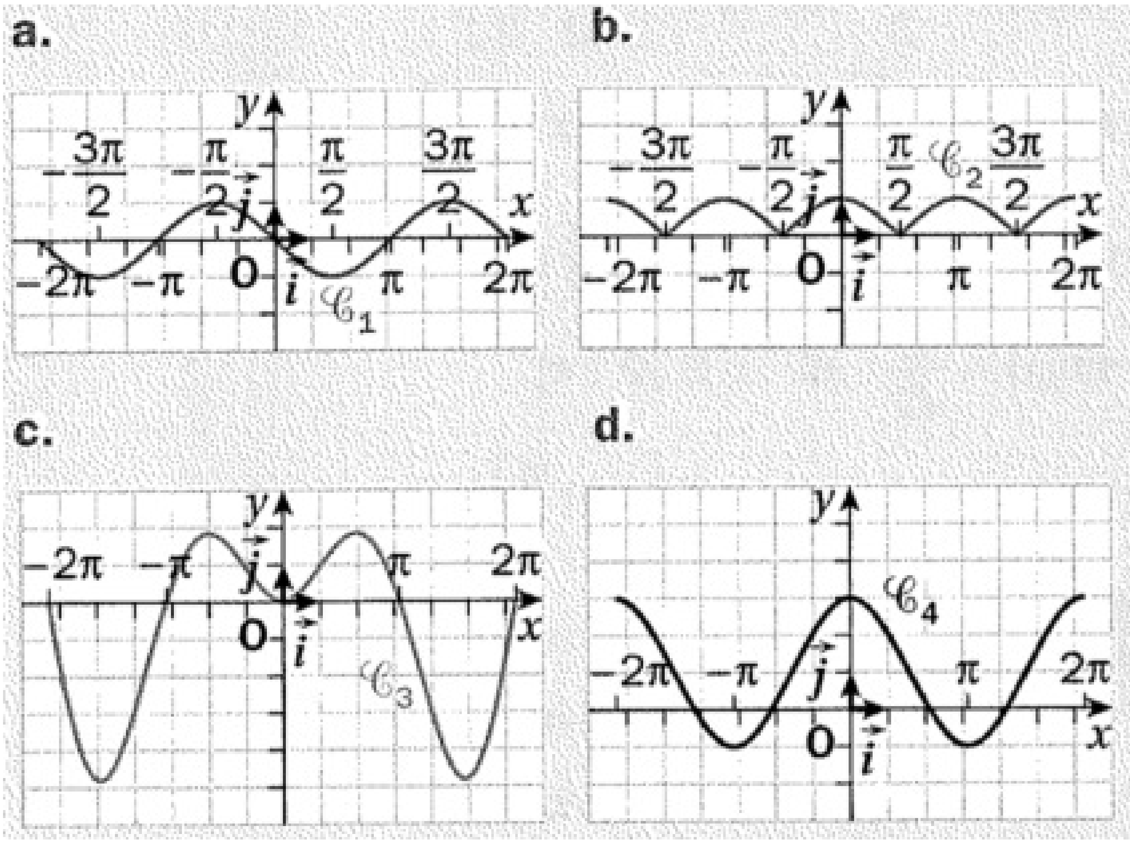
Émettre dans chaque cas, une conjecture quant à la parité de la fonction représentée. Justifier.



Exercice 2 :

Les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ sont respectivement les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

Émettre dans chaque cas, une conjecture quant à la parité de la fonction représentée. Justifier.



Exercice 3 :

Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{-3}{4+\cos(x)}.$$

1. Donner le domaine de définition de f.

2. Calculer $f(-x)$.

3. Déduis-en la parité de la fonction f.

4. Montrer que f est une fonction périodique, de période 2π.

Exercice 4 :

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \sqrt{2}\cos(2x) + 1.$$

©Cours Galilée *Toute reproduction, même partielle, est strictement interdite.*

1. Étudier la parité de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier la périodicité de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

3. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 :

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \sin(2x) + \cos(x)\sin(x).$$

1. Calculer $h(-x)$.

2. Déduis-en la parité de la fonction h.

3. Calculer $h(x + \pi)$.

4. Déduis-en la périodicité de la fonction h.

Exercice 6 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(4x) - \cos(x)\cos(2x)$$

1. Calculer $f(-x)$.

2. Déduis-en la parité de la fonction f.

3. Calculer $f(x + 2\pi)$.

4. Déduis-en la périodicité de la fonction f.

Exercice 7 :

Montrer que pour tout réel x on a:

1. $(\cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - \sin(x))^2 = 2$

2. $(\cos(x) + \sin(x))^2 - (\cos(x) - \sin(x))^2 = 4\cos(x)\sin(x)$

Exercice 8 :

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = 1 - 2\cos(x)$.

1. Montrer que la fonction g est périodique et préciser sa période.

2. **a.** Représenter à l'aide de la calculatrice la fonction g sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

b. Donner à partir d'une lecture graphique une conjecture de la parité de g.

c. Prouver la conjecture précédente.

3. Montrer que, pour tout réel x, $-1 \leq g(x) \leq 3$.

4. Donner à partir du graphe de g les solutions de l'équation $g(x) = 3$ dans l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

5. Résoudre dans l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$ l'équation $g(x) = 3$ et comparer avec le résultat précédent.

Exercice 9 :

Donner l'expression de la dérivée de chacune des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ ci-dessous.

1. $f(x) = -5\cos(x) - 3x$

2. $g(x) = 3x^2 \sin(x)$

3. $h(x) = x^2 - 2\cos(-3x + 4)$

4. $u(x) = 3x \sin(3x - 4)$

Exercice 10 :

On considère les fonctions définies sur $I \subset [-\pi, \pi]$ ci-dessous.
Déterminer pour chacune d'elle, l'ensemble de définition et de dérivabilité puis déterminer la fonction dérivée.

1. $f(x) = \sin(2x + 3) + 3x$

2. $f(x) = \dfrac{2}{\sin(x)}$

3. $f(x) = \sin(-3x + 5)\cos(-3x + 5)$

4. $f(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$

Exercice 11 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(x)\sin(2x)$$

1. Montrer que f est une fonction périodique et préciser sa période.

2. Étudier la parité de la fonction f.

3. Déduis-en un intervalle I sur lequel on peut restreindre l'étude de la fonction f.

4. Calculer la dérivée de la fonction f sur I.

Exercice 12 :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \sin(x)(1+\cos(x))$$

1. Montrer que g est une fonction périodique et préciser sa période.

2. Étudier la parité de la fonction g.

3. Déduis-en un intervalle I sur lequel on peut restreindre l'étude de la fonction g.

4. Calculer la dérivée de la fonction g sur I et écrire son expression en fonction de $\cos(x)$.

5. Montrer que pour $x \in I$; $\quad 2\left(\cos(x) - \dfrac{1}{2}\right)(\cos(x)+1) = g'(x)$.

6. Étudier le signe de $g'(x)$.

7. Déduis-en les variations de la fonction g sur I.