DÉRIVATION ET ÉTUDE DE FONCTIONS

CORRECTION DES EXERCICES

EXTREMUMS D'UNE FONCTION

Exercice 1 :

On veut montrer que pour tout réel $x \in [0; +\infty[$, $3x^3 - 4x + 5 \geq 3$.
Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^3 - 4x + 5.$$

1. Déterminons $f'(x)$.
La fonction f est une fonction polynôme, donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 9x^2 - 4$

Dressons le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
Étudions le signe de $f'(x)$.
Posons $f'(x) = 0$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{4}{9} \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ ou $x = -\dfrac{2}{3}$
Faisons en même temps le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f.
Calculons les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^3 - 4x + 5 = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^3 - 4x + 5 = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^3 = +\infty$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{61}{9}$	$\searrow$	$\frac{29}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

- $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = 3\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3 - 4\left(-\dfrac{2}{3}\right) + 5 = -\dfrac{8}{9} + \dfrac{8}{3} + 5 = \dfrac{61}{9}$
- $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 - 4\left(\dfrac{2}{3}\right) + 5 = \dfrac{8}{9} - \dfrac{8}{3} + 5 = \dfrac{29}{9}$

2. Déduisons la valeur du minimum de f sur $[0; +\infty[$.

D'après le tableau de variation précédent, sur l'intervalle $\left]-\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$ la fonction admet un minimum en $\dfrac{2}{3}$ ayant pour valeur $\dfrac{29}{9}$.

On sait que $[0; +\infty[\subset \left]-\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$ car $-\dfrac{2}{3} < 0$ donc le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est $\dfrac{29}{9}$.

3. Conclusion:

Le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est $\dfrac{29}{9}$.

Donc pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) \geq \dfrac{29}{9}$ or $\dfrac{29}{9} > 3$.

On conclut donc que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) \geq 3$.

D'où pour tout $x \in [0; +\infty[$, $3x^3 - 4x + 5 \geq 3$.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + x - 2\sqrt{x}.$$

1. Déterminons $f'(x)$.
La fonction $x \mapsto x^2 + x$ est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]1, +\infty[$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant la fonction racine carrée alors elle est dérivable sur $]1, +\infty[$.
Par conséquent, la fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
Pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 1 - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 2x + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2. Étudions le signe de $f'(x)$.
$f'(x) = 2x + 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
Pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} 1 < x &\Leftrightarrow 1 < \sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{x}} < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < -\frac{1}{\sqrt{x}} < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} < 1 \\ &\Leftrightarrow 2x < 2x + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} < 2x + 1 \\ &\Leftrightarrow 2x < f'(x) < 2x + 1 \end{aligned}$$

Or pour tout $x \in]1, +\infty[$, $2x > 0$.
Ainsi, pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f'(x) > 0$

3. Dressons le tableau de variations de f.
Calculons d'abord les limites de f aux bornes de l'intervalle $]1, +\infty[$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + x - 2\sqrt{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
- $f(1) = 0$

x	1		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Donnons les extremums de la fonction f sur $]1, +\infty[$.
La fonction f n'admet qu'un seul extremum sur $]1, +\infty[$.
C'est le minimum ayant pour valeur 0 qui est atteint en $x = 1$

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 7x + 8$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminons $f'(x)$.
La fonction f est une fonction polynôme donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x - 7$

2. Déterminons l'équation de la tangente T au point d'abscisse 1.
On a: $T : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$
$f'(1) = 4 \times 1 - 7 = -3$ et $f(1) = 2 \times 1^2 - 7 \times 1 + 8 = 3$
Donc $T : y = -3(x - 1) + 3 \Leftrightarrow T : y = -3x + 3 + 3$
D'où $T : y = -3x + 6$

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3x + 6$.

a. Déterminons l'expression de $f(x) - g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= 2x^2 - 7x + 8 - (-3x + 6) \\ &= 2x^2 - 7x + 8 + 3x - 6 \\ &= 2x^2 - 4x + 2 \end{aligned}$$

b. Étudions le signe de $f(x) - g(x)$.
Soit $u(x) = f(x) - g(x)$ on a:
$u(x) = 2x^2 - 4x + 2$.
La fonction u est une fonction polynôme alors elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}, u'(x) = 4x - 4$.
La dérivée $u'(x)$ s'annule pour $x = 1$
Donc on a le tableau de variation ci-dessous:

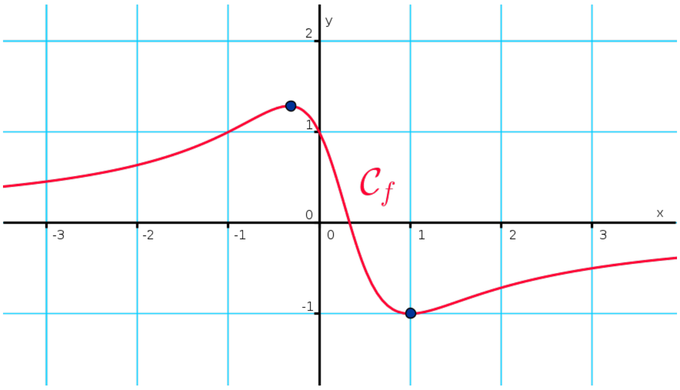
x	$-\infty$		1		$+\infty$
u'		$-$	0	$+$	
u	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c. Déterminons la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente T.
D'après le tableau de variation ci-dessus, 0 est le minimum de la fonction $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) > 0$.
Par conséquent la courbe représentative de f est au dessus de la tangente T.

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-3x + 1}{2x^2 - x + 1}$.

1. **a.** Traçons la courbe représentative de f à l'aide d'un logiciel.



b. Donnons par lecture graphique, les extremums de la fonction f, ainsi que les valeurs de x pour lesquelles ils sont atteints.

- -1 est un minimum de f qui est atteint en 1.
- $1,3$ est un maximum de f qui est atteint en $-0,3$

2. **a.** Déterminer $f'(x)$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(-3x+1)'(2x^2-x+1)-(2x^2-x+1)'(-3x+1)}{(2x^2-x+1)^2} \\
&= \frac{-3(2x^2-x+1)-(4x-1)(-3x+1)}{(2x^2-x+1)^2} \\
&= \frac{-6x^2+3x-3-(-12x^2+4x+3x-1)}{(2x^2-x+1)^2} \\
&= \frac{-6x^2+3x-3+12x^2-7x+1}{(2x^2-x+1)^2} \\
&= \frac{6x^2-4x-2}{(2x^2-x+1)^2}
\end{aligned}$$

b. Étudions le signe de $f'(x)$.

On a: $f'(x) = \dfrac{6x^2-4x-2}{(2x^2-x+1)^2}$.

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(2x^2-x+1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le signe du numérateur.

Étudions donc le signe de $x \mapsto 6x^2-4x-2$.

Posons $6x^2 - 4x - 2 = 0$.
$6x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$.
Soit Δ le discriminant de cette équation.
$\Delta = (-2)^2 - 4(3)(-1) = 4 + 12 = 16 = 4^2$.
$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
$x_1 = \dfrac{2-4}{6} = -\dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{2+4}{6} = 1$.
Faisons un tableau de signe.

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\infty, -\dfrac{1}{3}\right[\cup]1, +\infty[$, $f'(x) > 0$
et pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{3}, 1\right[$, $f'(x) < 0$

c. Dressons le tableau de variations de f.
Calculons d'abord les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x+1}{2x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{3x}{2x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{3}{2x}$

  Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{3}{2x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x+1}{2x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{3x}{2x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{3}{2x}$

  Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{3}{2x} = 0$

On obtient donc le tableau de variation ci-dessous:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$\frac{9}{7}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

- $f(1) = -1$
- $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{7}$

d. Confirmons ou infirmons les valeurs des extremums trouvés à la question 1.
D'après le tableau de variation ci-dessus, nous confirmons que la fonction f admet un minimum en 1 ayant pour valeur -1. Puis nous confirmons en apportant plus de précision aux valeurs que la fonction f admet un maximum en $-\frac{1}{3}$ ayant pour valeur $\frac{9}{7}$

Exercice 5 :

1. Donnons le prix qu'on devrait appliqué par offre pour que le chiffre d'affaires soit maximal.
La fonction f étant une fonction polynôme alors elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur l'intervalle $[1; 3]$ et pour tout $x \in [1; 3]$, $f'(x) = 2x + 2$.
La fonction $f'(x)$ s'annule pour $x = -1$ et on a le tableau de signe ci-dessous:

x	1		3
f'		$+$	

Ainsi pour tout $x \in [1, 3]$, $f'(x) > 0$.
Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur $[1, 3]$.

La fonction f étant définie et strictement croissante sur l'intervalle $[1; 3]$ alors le prix qu'on devrait appliqué par offre pour que le chiffre d'affaires soit maximal est le prix $x = 3$.
Donc le prix à payer pour que le chiffre d'affaire soit maximal est de 3 euros.

2. Donnons alors le chiffre d'affaires maximum.
Le chiffre d'affaire maximum est la valeur de f en centaine d'euros lorsque $x = 3$.
Ainsi, $f(3) = (3)^2 + 2 \times 3 = 9 + 6 = 15$.
D'où le chiffre d'affaire maximum est de 1500 euros.