DÉRIVATION ET ÉTUDE DE FONCTIONS

CORRECTION DES EXERCICES

ÉTUDE DE FONCTIONS

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3-5x}{2x+2}.$$

1. Déterminons le domaine de définition de f.
Soit D le domaine de définition de la fonction f.
$D = \{x \in \mathbb{R} / 2x + 2 \neq 0\}$
Posons $2x + 2 = 0$.
$2x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$.
D'où $D =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

2. Déterminons la fonction dérivée de f en précisant son domaine de dérivabilité.
Le numérateur et le dénominateur de la fonction f sont des fonctions polynômes, donc elles sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ en particulier sur D.
De même le dénominateur de la fonction f ne s'annule pas sur D.
Alors, la fonction f est dérivable sur D comme quotient de deux fonctions dérivables sur D et dont le dénominateur ne s'annule pas sur D.

Pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$ on a:

$$f'(x) = \frac{(3-5x)'(2x+2) - (2x+2)'(3-5x)}{(2x+2)^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-5(2x+2) - 2(3-5x)}{(2x+2)^2} \\ &= \frac{-10x - 10 - 6 + 10x}{(2x+2)^2} \\ f'(x) &= \frac{-16}{(2x+2)^2} \end{aligned}$$

D'où $f'(x) = \dfrac{-16}{(2x+2)^2}$

3. Étudions le signe de f'.
$f'(x) = \dfrac{-16}{(2x+2)^2}$.
On sait que pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$, $(2x+2)^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le signe du numérateur.
Or pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$, $-16 < 0$, donc $f'(x) < 0$.
D'où $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

4. Déduisons le tableau de variation de f.
Calculons d'abord les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3-5x}{2x+2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-5x}{2x} = -\dfrac{5}{2}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-5x}{2x+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-5x}{2x} = -\dfrac{5}{2}$

- $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x) &= \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{3-5x}{2x+2}\\
&= \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} (3-5x) \times \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{1}{2x+2}\\
&= 8 \times -\infty\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

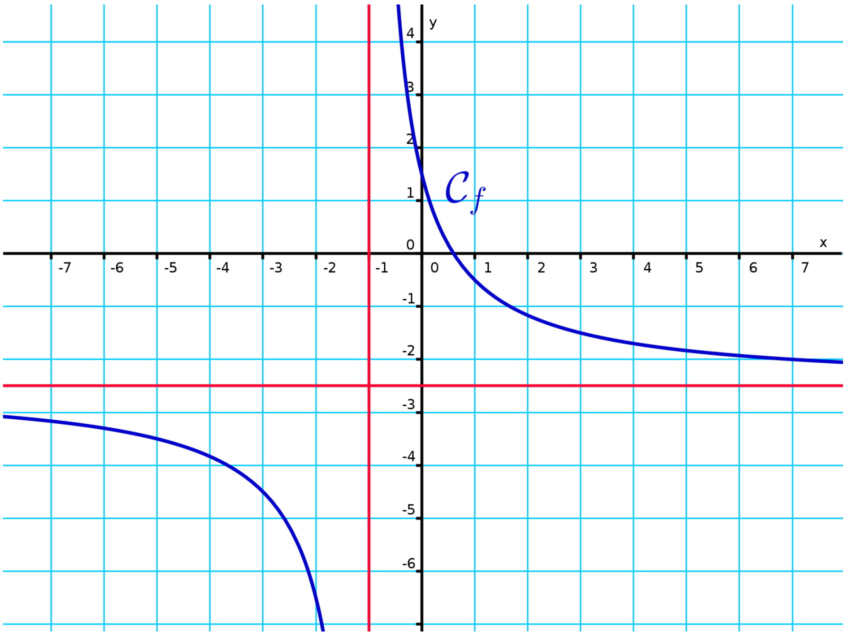
- $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) &= \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{3-5x}{2x+2}\\
&= \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} (3-5x) \times \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{1}{2x+2}\\
&= 8 \times +\infty\\
&= +\infty
\end{aligned}$$

On obtient donc le tableau ci-dessous:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
f	$-\frac{5}{2}$ $\searrow$	$-\infty$	$\|$	$+\infty$ $\searrow$	$-\frac{5}{2}$

5. Traçons la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.



Exercice 2 :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x}.$$

1. Déterminons le domaine de définition de f.
Soit D le domaine de définition de f.
$D = \{x \in \mathbb{R}/2x \neq 0\}$
Donc $D = \mathbb{R}^*$

2. Déterminons la fonction dérivée de f en précisant son domaine de dérivabilité.
Le numérateur et le dénominateur de la fonction f sont des fonctions polynômes, donc elles sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ en particulier sur D.
De même le dénominateur de la fonction f ne s'annule pas sur D.
Alors, la fonction f est dérivable sur D comme quotient de deux fonctions dérivables sur D et dont le dénominateur ne s'annule pas sur D.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2+1)'(2x) - (2x)'(x^2+1)}{4x^2} \\ &= \frac{2x \times 2x - 2(x^2+1)}{4x^2} \\ &= \frac{4x^2 - 2x^2 - 2}{4x^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2}{4x^2} \\ f'(x) &= \frac{x^2-1}{2x^2} \end{aligned}$$

3. Étudions le signe de $f'(x)$.

$f'(x) = \dfrac{x^2-1}{2x^2}$

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $2x^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le signe du numérateur.

Posons $x^2 - 1 = 0$.

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

Faisons un tableau de signe:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $x^2 - 1 > 0$

et pour tout $x \in]-1, 1[$, $x^2 - 1 < 0$

On conclut donc que: pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f'(x) > 0$, pour tout $x \in]-1, 1[$ $f'(x) < 0$, et $f'(-1) = f'(1) = 0$

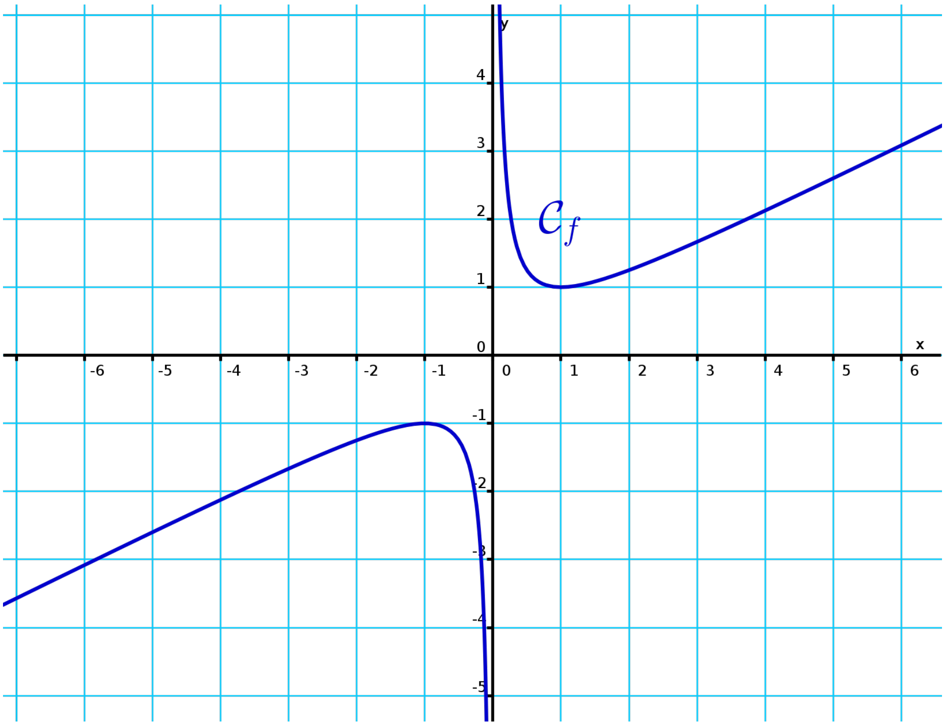
4. Déduisons le tableau de variation de f.

Calculons d'abord les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \dfrac{x^2+1}{2x} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}(x^2+1) \times \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \dfrac{1}{2x} = 1 \times -\infty = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \dfrac{x^2+1}{2x} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(x^2+1) \times \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \dfrac{1}{2x} = 1 \times +\infty = +\infty$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5. Traçons la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.

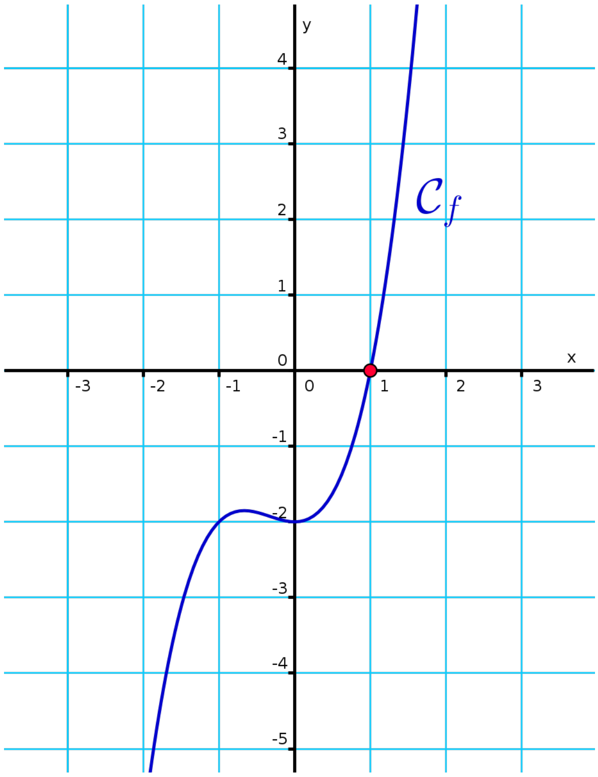


Exercice 3 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2.$$

1. **a.** Traçons la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.



b. Donnons le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

On a: $f(1) = 0$.

Pour tout $x \in]-\infty, 1[$ la courbe représentative de f est en dessous de l'axe des abscisses donc $f(x) < 0$.

Et pour tout $x \in]1, +\infty[$ la courbe représentative de f est au dessus de l'axe des abscisses donc $f(x) > 0$.

2. Déterminons la fonction dérivée f' de f et dressons le tableau de variation de la fonction f.

La fonction f est une fonction polynôme donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

Dressons le tableau de variation de f.

Posons $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3x^2 + 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(3x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Dressons en même temps le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f:
Calculons les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x^2-2) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x^2-2) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
- $f(0) = 0^3 + 0^2 - 2 = -2$
- $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2 = -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} - 2$
  $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-8+12-54}{27} = -\frac{50}{27}$

On obtient donc le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		0		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\frac{50}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Déduisons le signe de la fonction f.
D'après le tableau de variation obtenu à la question précédente, on a:

- Pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $f(x) \in]-\infty, -2]$ c'est-à-dire $f(x) \leq -2$ donc $f(x) < 0$ pour tout $x \in]-\infty, 0]$.
- Pour tout $x \in \left[0, -\frac{2}{3}\right]$, $f(x) \in \left[-2, -\frac{50}{27}\right]$ c'est à dire $-2 \leq f(x) \leq -\frac{50}{27}$

Donc $f(x) < 0$ pour tout $x \in \left[0, -\dfrac{2}{3}\right]$

- Sur l'intervalle $\left]-\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$, $f(x) \in \left]-\dfrac{50}{27}, +\infty\right[$ donc il existe un réel $\alpha \left]-\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

  Constate que $f(1) = 0$ et $1 \in \left]-\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$ donc $\alpha = 1$.

  Par conséquent:

  Pour tout $x \in \left]-\dfrac{2}{3}, 1\right[$ $f(x) < 0$

  Pour tout $x \in]1, +\infty[$ $f(x) > 0$

  En somme:

  Pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $f(x) < 0$ et

  Pour tout $x \in]1, +\infty[$ $f(x) > 0$

