TRIGONOMÉTRIE (II)

CORRECTION DES EXERCICES

ÉTUDES DE FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Exercice 1 :

Émettons dans chaque cas, une conjecture quant à la parité de la fonction représentée en justifiant.

1. La fonction f_1 est une fonction paire car sa courbe représentative $\mathcal{C}_1$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. La fonction f_2 est une fonction impaire car sa courbe représentative $\mathcal{C}_2$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

3. La fonction f_3 n'est ni paire, ni impaire car sa courbe représentative $\mathcal{C}_3$ n'est ni symétrique par à l'axe des ordonnées, ni symétrique par rapport à l'origine du repère.

4. La fonction f_4 est une fonction paire car sa courbe représentative $\mathcal{C}_4$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 2 :

Émettons dans chaque cas, une conjecture quant à la parité de la fonction représentée en justifiant.

1. La fonction f_1 est une fonction impaire car sa courbe représentative $\mathcal{C}_1$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

2. La fonction f_2 est une fonction paire car sa courbe représentative $\mathcal{C}_2$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. La fonction f_3 est une fonction paire car sa courbe représentative $\mathcal{C}_3$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

4. La fonction f_4 est une fonction paire car sa courbe représentative $\mathcal{C}_4$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 3 :

1. Donnons le domaine de définition de f.
Soit D_f le domaine de définition de f.
$D_f = \{x \in \mathbb{R}/4 + \cos(x) \neq 0\}$
On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \Leftrightarrow 3 \leq 4 + \cos(x) \leq 5$.
Ainsi $4 + \cos(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
D'où $D_f = \mathbb{R}$

2. Calculons $f(-x)$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-3}{4+\cos(-x)} \\ &= \frac{-3}{4+\cos(x)} \quad \text{car } \cos(-x) = \cos(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

3. Déduisons la parité de la fonction f.
De ce qui précède on a: $f(-x) = f(x)$.
$D_f = \mathbb{R}$ donc pour tout $x \in D_f$ on a: $-x \in D_f$ et de plus $f(-x) = f(x)$
On en déduit donc que la fonction f est une fonction paire.

4. Montrons que f est une fonction périodique, de période 2π.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et on a:

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \frac{-3}{4+\cos(x+2\pi)} \\ &= \frac{-3}{4+\cos(x)} \quad \text{car } \cos(x+2\pi) = \cos(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction f est une fonction périodique de période 2π

Exercice 4 :

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \sqrt{2}\cos(2x) + 1.$$

1. Étudions la parité de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et on a:
$g(-x) = \sqrt{2}\cos(-2x) + 1 = \sqrt{2}\cos(2x) + 1 = g(x)$.
D'où la fonction g est une fonction paire.

2. Étudions la périodicité de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{2}\cos(2x) + 1 \\ &= \sqrt{2}\cos(2x + 2\pi) + 1 \text{ car } \cos(2x) = \cos(2x + 2\pi) \\ &= \sqrt{2}\cos(2(x + \pi)) + 1 \\ &= g(x + \pi) \end{aligned}$$

On a : $g(x + \pi) = g(x)$ et on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \pi \in \mathbb{R}$.
Donc la fonction g est une fonction périodique de période π.

3. Résolvons l'équation $g(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos(2x) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Soit S l'ensemble solution de l'équation $g(x) = 0$

$$S = \left\{ -\frac{3\pi}{8} + k\pi ; \frac{3\pi}{8} + k\pi \right\} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 5 :

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \sin(2x) + \cos(x)\sin(x).$$

1. Calculons $h(-x)$.

$$\begin{aligned} h(-x) &= \sin(-2x) + \cos(-x)\sin(-x) \\ &= -\sin(2x) - \cos(x)\sin(x) \\ &= -(\sin(2x) + \cos(x)\sin(x)) \\ &= -h(x) \end{aligned}$$

2. Déduisons la parité de la fonction h.
De ce qui précède on a: $h(-x) = -h(x)$.
La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a:
$-x \in \mathbb{R}$ et de plus $h(-x) = -h(x)$.
D'où la fonction h est une fonction impaire.

3. Calculons $h(x + \pi)$.

$$\begin{aligned} h(x+\pi) &= \sin(2(x+\pi)) + \cos(x+\pi)\sin(x+\pi) \\ &= \sin(2x + 2\pi) + (-\cos(x))(-\sin(x)) \\ &= \sin(2x) + \cos(x)\sin(x) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

4. Déduisons la périodicité de la fonction h.
De ce qui précède, on a : $h(x + \pi) = h(x)$.
h est définie sur $\mathbb{R}$ et on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \pi \in \mathbb{R}$.
On conclut donc que la fonction h est périodique de période π.

Exercice 6 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(4x) - \cos(x)\cos(2x)$$

1. Calculons $f(-x)$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-4x) - \cos(-x)\cos(-2x) \\ &= \cos(4x) - \cos(x)\cos(2x) \text{ car } \cos(-X) = \cos(X) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

2. Déduisons la parité de la fonction f.
De ce qui précède on a : $f(-x) = f(x)$.
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a:
$-x \in \mathbb{R}$ et de plus $f(-x) = f(x)$.
D'où la fonction f est une fonction paire.

3. Calculons $f(x + 2\pi)$.

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \cos[4(x+2\pi)] - \cos(x+2\pi)\cos[2(x+2\pi)] \\ &= \cos(4x + 2\times 4\pi) - \cos(x)\cos(2x + 2\times 2\pi) \\ &= \cos(4x) - \cos(x)\cos(2x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

4. Déduisons la périodicité de la fonction f.
De ce qui précède, on a: $f(x + 2\pi) = f(x)$.
f est définie sur $\mathbb{R}$ et on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$.
On conclut donc que la fonction f est une fonction périodique de période 2π.

Exercice 7 :

Montrons que pour tout réel x on a:

1. $(\cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - \sin(x))^2 = 2$
On a:

$(\cos(x)+\sin(x))^2 = \cos^2(x)+2\cos(x)\sin(x)+\sin^2(x)$
$(\cos(x)-\sin(x))^2 = \cos^2(x)-2\cos(x)\sin(x)+\sin^2(x)$
Ainsi on a:

$$\begin{aligned}
&(\cos(x)+\sin(x))^2+(\cos(x)-\sin(x))^2\\
&\qquad = \cos^2(x)+2\cos(x)\sin(x)+\sin^2(x)\\
&\qquad\quad + \cos^2(x)-2\cos(x)\sin(x)+\sin^2(x)\\
&\qquad = 2\cos^2(x)+2\sin^2(x)\\
&\qquad = 2(\cos^2(x)+\sin^2(x))\\
&\qquad = 2\times 1 \text{ car } \cos^2(x)+\sin^2(x)=1\\
&\qquad = 2
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait montrer.

2. $(\cos(x)+\sin(x))^2-(\cos(x)-\sin(x))^2 = 4\cos(x)\sin(x)$

$$\begin{aligned}
&(\cos(x)+\sin(x))^2-(\cos(x)-\sin(x))^2\\
&\qquad = \cos^2(x)+2\cos(x)\sin(x)+\sin^2(x)\\
&\qquad\quad -(\cos^2(x)-2\cos(x)\sin(x)+\sin^2(x))\\
&\qquad = \cos^2(x)+2\cos(x)\sin(x)+\sin^2(x)\\
&\qquad\quad -\cos^2(x)+2\cos(x)\sin(x)-\sin^2(x)\\
&\qquad = 4\cos(x)\sin(x)
\end{aligned}$$

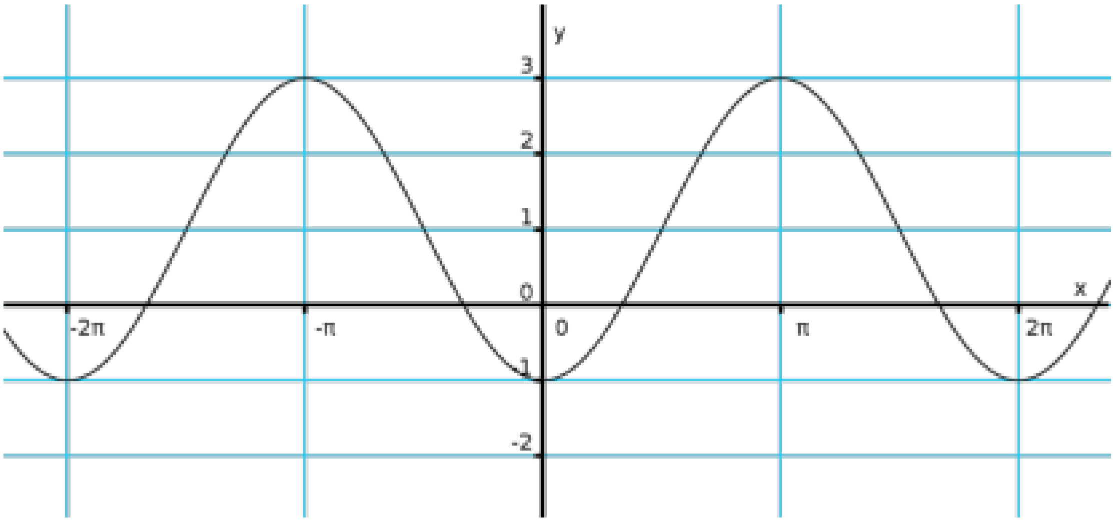
Ce qu'il fallait montrer.

Exercice 8 :

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = 1-2\cos(x)$.

1. Montrons que la fonction g est périodique et précisons sa période.
La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a $x+2\pi \in \mathbb{R}$.
De plus, $g(x+2\pi) = 1-2\cos(x+2\pi) = 1-2\cos(x) = g(x)$.
D'où la fonction g est une fonction périodique de période 2π.

2. **a.** Représentons à l'aide de la calculatrice la fonction g sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.



b. Donnons à partir d'une lecture graphique une conjecture de la parité de g.
La courbe représentative de la fonction g est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées donc la fonction g est une fonction paire.

c. Prouvons la conjecture précédente.
La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$.
De plus, $g(-x) = 1 - 2\cos(-x) = 1 - 2\cos(x) = g(x)$.
D'où la fonction g est bien une fonction paire.

3. Montrons que, pour tout réel x, $-1 \leq g(x) \leq 3$.
On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos(x) \leq 1 &\Leftrightarrow -2 \times (-1) \geq -2\cos(x) \geq -2 \times 1 \\ &\Leftrightarrow 2 \geq -2\cos(x) \geq -2 \\ &\Leftrightarrow -2 \leq -2\cos(x) \leq 2 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq 1 - 2\cos(x) \leq 3 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq g(x) \leq 3 \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait montrer.

4. Donnons à partir du graphe de g les solutions de l'équation $g(x) = 3$ dans l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.
A partir du graphe de la fonction g on déduit que l'équation $g(x) = 3$ admet dans l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$ deux solutions que sont: $-\pi$ et π.

5. Résolvons dans l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$ l'équation $g(x) = 3$ et comparons avec le résultat précédent.

$$\begin{aligned} g(x) = 3 &\Leftrightarrow 1 - 2\cos(x) = 3 \\ &\Leftrightarrow -2\cos(x) = 2 \\ &\Leftrightarrow \cos(x) = -1 \end{aligned}$$

Les valeurs de x appartenant à l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$ et vérifiant la condition $\cos(x) = -1$ sont : $x = -\pi$ et $x = \pi$.
Ainsi, les nombres réels $-\pi$ et π sont solutions de l'équation $g(x) = 3$.
D'où la confirmation du résultat de la question précédente.

Exercice 9 :

Donnons l'expression de la dérivée de chacune des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ ci-dessous.

1. $f(x) = -5\cos(x) - 3x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5\sin(x) - 3$

2. $g(x) = 3x^2\sin(x)$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= (3x^2)'\sin(x) + 3x^2(\sin(x))' \\ &= 6x\sin(x) + 3x^2\cos(x) \end{aligned}$$

D'où $g'(x) = 6x\sin(x) + 3x^2\cos(x)$

3. $h(x) = x^2 - 2\cos(-3x + 4)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x^2)' - 2[\cos(-3x + 4)]' \\ &= 2x - 2 \times [-(-3x + 4)']\sin(-3x + 4) \\ &= 2x - 2 \times 3\sin(-3x + 4) \\ &= 2x - 6\sin(-3x + 4) \end{aligned}$$

D'où $h'(x) = 2x - 6\sin(-3x + 4)$

4. $u(x) = 3x\sin(3x-4)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u'(x) &= (3x)'\sin(3x-4) + 3x[\sin(3x-4)] \\ &= 3\sin(3x-4) + 3x(3x-4)'\cos(3x-4) \\ &= 3\sin(3x-4) + 3x \times 3\cos(3x-4) \\ &= 3\sin(3x-4) + 9x\cos(3x-4) \end{aligned}$$

D'où $u'(x) = 3\sin(3x-4) + 9x\cos(3x-4)$

Exercice 10 :

On considère les fonctions définies sur $I \subset [-\pi, \pi]$ ci-dessous.
Déterminons pour chacune d'elle, l'ensemble de définition et de dérivabilité puis déterminons la fonction dérivée.

1. $f(x) = \sin(2x+3) + 3x$.
Les fonctions $x \mapsto \sin(2x+3)$ et $x \mapsto 3x$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[-\pi;\pi]$ donc la fonction f est définie et dérivable sur $[-\pi;\pi]$ comme somme de deux fonctions définies et dérivables sur $[-\pi;\pi]$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (2x+3)'\cos(2x+3) + 3 = 2\cos(2x+3) + 3$.
D'où $f'(x) = 2\cos(2x+3) + 3$.

2. $f(x) = \dfrac{2}{\sin(x)}$.
Soit D_f le domaine de définition de la fonction f.
$D_f = \{x \in [-\pi;\pi] / \sin(x) \neq 0\}$.
Posons $\sin(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \sin(x) = 0 &\Leftrightarrow \sin(x) = \sin(0) \\ &\Leftrightarrow x = 0 + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi \end{aligned}$$

Ainsi, x étant dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$ on obtient $x = 0$, $x = -\pi$ et $x = \pi$.

D'où $D_f =]-\pi; 0[\cup]0; \pi[$.
La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est une fonction définie et dérivable sur D_f et ne s'annule pas.
Ainsi, la fonction f est dérivable sur D_f comme l'inverse d'une fonction dérivable sur D_f et qui ne s'annule pas.
Pour tout $x \in D_f$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times \frac{-(\sin(x))'}{sin^2(x)} \\ &= 2 \times \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)} \\ &= \frac{-2\cos(x)}{\sin^2(x)} \end{aligned}$$

D'où $f'(x) = \dfrac{-2\cos(x)}{\sin^2(x)}$

3. $f(x) = \sin(-3x+5)\cos(-3x+5)$.
Les fonctions $x \mapsto \sin(-3x+5)$ et $x \mapsto \cos(-3x+5)$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[-\pi; \pi]$. Ainsi, la fonction f est définie et dérivable sur $[-\pi; \pi]$ comme produit de deux fonctions définies et dérivables sur $[-\pi; \pi]$.
Pour tout $x \in [-\pi; \pi]$;

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin(-3x+5))'\cos(-3x+5) + (\cos(-3x+5))'\sin(-3x+5) \\ &= -3\cos(-3x+5)\cos(-3x+5) - (-3)\sin(-3x+5)\sin(-3x+5) \\ &= -3\cos^2(-3x+5) + 3\sin^2(-3x+5) \\ &= 3\sin^2(-3x+5) - 3\cos^2(-3x+5) \end{aligned}$$

D'où $f'(x) = 3\sin^2(-3x+5) - 3\cos^2(-3x+5)$

4. $f(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$.
Soit D_f le domaine de définition de la fonction f.
$D_f = \{x \in [-\pi; \pi] / \cos(x) \neq 0\}$.

Posons $\cos(x) = 0$.
x étant dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$ les valeurs de x pour lesquelles $\cos(x) = 0$ sont $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$.
D'où $D_f = \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
Les fonction $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto 1+\sin(x)$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ en particulier sur D_f. Ainsi, la fonction f est dérivable sur D_f comme quotient de deux fonctions dérivables sur D_f et dont le dénominateur ne s'annule pas.
Pour tout $x \in D_f$;

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1+\sin(x))'\cos(x) - (\cos(x))'(1+\sin(x))}{(\cos(x))^2} \\ &= \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)(1+\sin(x))}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1+\sin(x)}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

D'où $f'(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{\cos^2(x)}$

Exercice 11 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(x)\sin(2x)$$

1. Montrons que f est une fonction périodique et précisons sa période.
f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x+2\pi \in \mathbb{R}$ puis on a:

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \sin(x+2\pi)\sin(2(x+2\pi)) \\ &= \sin(x)\sin(2x + 2\times 2\pi) \\ &= \sin(x)\sin(2x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est une fonction périodique de période 2π.

2. Étudions la parité de la fonction f.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a: $-x \in \mathbb{R}$ et
$f(-x) = \sin(-x)\sin(-2x) = -\sin(x)(-\sin(2x)) = \sin(x)\sin(2x) = f(x)$.
Par conséquent, la fonction f est une fonction paire.

3. Déduisons un intervalle I sur lequel on peut restreindre l'étude de la fonction f.
La fonction f est une fonction périodique de période 2π donc on peut restreindre l'étude de la fonction f sur un intervalle de longueur 2π comme l'intervalle $[-\pi;\pi]$.
De plus la fonction f est une fonction paire, donc on peut restreindre l'étude de la fonction f sur l'intervalle $[0;\pi]$.
D'où $I = [0;\pi]$

4. Calculons la dérivée de la fonction f sur I.
Pour tout $x \in [0;\pi]$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin(x))'\sin(2x) + \sin(x)(\sin(2x))' \\ &= \cos(x)\sin(2x) + \sin(x) \times 2\cos(2x) \\ &= \cos(x)\sin(2x) + 2\sin(x)\cos(2x) \end{aligned}$$

D'où $f'(x) = \cos(x)\sin(2x) + 2\sin(x)\cos(2x)$

Exercice 12 :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \sin(x)(1 + \cos(x))$$

1. Montrons que g est une fonction périodique et précisons sa période.
g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x+2\pi \in \mathbb{R}$

puis on a:

$$\begin{aligned} g(x+2\pi) &= \sin(x+2\pi)(1+\cos(x+2\pi)) \\ &= \sin(x)(1+\cos(x)) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction g est une fonction périodique de période 2π.

2. Étudions la parité de la fonction g.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ et
$g(-x) = \sin(-x)(1+\cos(-x)) = -\sin(x)(1+\cos(x)) = -g(x)$.
Par conséquent, la fonction g est une fonction impaire.

3. Déduisons un intervalle I sur lequel on peut restreindre l'étude de la fonction g.
La fonction g est périodique de période 2π donc on peut restreindre l'étude de la fonction g à un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi;\pi]$.
De plus, la fonction g est une fonction impaire donc on peut l'étudier sur $[0;+\infty[$.
En somme, on peut étudier la fonction g sur l'intervalle $I = [0;\pi]$

4. Calculons la dérivée de la fonction g sur I et écrivons son expression en fonction de $\cos(x)$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\sin(x))'(1+\cos(x)) + \sin(x)(1+\cos(x))' \\ &= \cos(x)(1+\cos(x)) + \sin(x)(-\sin(x)) \\ &= \cos(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= \cos^2(x) + \cos(x) - (1-\cos^2(x)) \\ &= 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 \end{aligned}$$

D'où $g'(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1$

5. Montrons que pour $x \in I$; $\quad 2\left(\cos(x) - \dfrac{1}{2}\right)(\cos(x)+1) = g'(x)$.

$$\begin{aligned}2\left(\cos(x)-\frac{1}{2}\right)(\cos(x)+1) &= 2\left(\cos^2(x)+\cos(x)-\frac{\cos(x)}{2}-\frac{1}{2}\right)\\ &= 2\cos^2(x)+2\cos(x)-\cos(x)-1\\ &= 2\cos^2(x)+\cos(x)-1\\ &= g'(x)\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait montrer.

6. Étudions le signe de $g'(x)$.

De ce qui précède, $g'(x)=2\left(\cos(x)-\frac{1}{2}\right)(\cos(x)+1)$

Posons $g'(x)=0$.

$$\begin{aligned}g'(x)=0 &\Leftrightarrow 2\left(\cos(x)-\frac{1}{2}\right)(\cos(x)+1)=0\\ &\Leftrightarrow \cos(x)-\frac{1}{2}=0 \text{ ou } \cos(x)+1=0\end{aligned}$$

Résolvons les équations $\cos(x)-\frac{1}{2}=0$ et $\cos(x)+1=0$.

- $\cos(x)-\frac{1}{2}=0$
  $\cos(x)-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \cos(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$ car $x\in[0;\pi]$
  Ainsi, $\cos(x)-\frac{1}{2}>0$ pour $x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right[$ et $\cos(x)-\frac{1}{2}<0$ pour $x\in\left]\frac{\pi}{3};\pi\right]$.
- $\cos(x)+1=0$
  $\cos(x)+1=0 \Leftrightarrow \cos(x)=-1 \Leftrightarrow x=\pi$ car $x\in[0;\pi]$.
  $\cos(x)+1>0$ quand $\cos(x)>-1$ donc pour $x\in[0;\pi[$ et
  $\cos(x)+1<0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle I.
  Faisons un tableau de signe de $g'(x)$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\cos(x)-\frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	$\vdots$
$\cos(x)+1$		$+$	$\vdots$	$+$	0
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0

7. Déduisons les variations de la fonction g sur I.
Pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right[$, $g'(x) > 0$ donc la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{3}\right[$.
Pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{3};\pi\right[$, $g'(x) < 0$ donc la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{3};\pi\right[$.