DÉRIVATION ET ÉTUDE DE FONCTIONS

CORRECTION DES EXERCICES

DÉRIVATION GLOBALE:

Exercice 1 :

Déterminons dans chacun des cas, l'ensemble de dérivabilité de la fonction et calculons sa dérivée.

1. $f : x \mapsto x^4 + 2$
La fonction f est une fonction polynôme alors elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3$.

2. $g : x \mapsto -3x + \sqrt{7}$
La fonction g est une fonction polynôme alors elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -3$.

3. $h : x \mapsto 3\sqrt{5}x + 3$
La fonction h est une fonction polynôme alors elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 3\sqrt{5}$.

4. $k : x \mapsto 3x^2 - \sqrt{3}x + 2$
La fonction k est une fonction polynôme alors elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k'(x) = 3 \times 2x - \sqrt{3}$
D'où, $k'(x) = 6x - \sqrt{3}$

Exercice 2 :

Déterminons dans chacun des cas, l'ensemble de dérivabilité de la fonction et calculons sa dérivée.

1. $f : x \mapsto 3\sqrt{x}$

La fonction racine carrée est définie sur $[0, +\infty[$ mais n'est dérivable que sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

D'où la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Alors, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = 3 \times (\sqrt{x})' = 3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

D'où $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

2. $g : x \mapsto \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Le dénominateur de la fonction g s'annule pour $x = 0$ et le numérateur est définie sur $\mathbb{R}$, ainsi la fonction g est définie sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction g étant une fonction rationnelle alors elle est continue et dérivable sur son domaine de définition.

$$\begin{aligned}
\text{Alors, pour tout } x \in \mathbb{R}^*, g'(x) &= \frac{(x^2+1)'x - x'(x^2+1)}{x^2} \\
&= \frac{2x \times x - 1 \times (x^2+1)}{x^2} \\
&= \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} \\
&= \frac{x^2 - 1}{x^2}
\end{aligned}$$

D'où, $g'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

3. $h : t \mapsto \dfrac{2t^2 - 3}{3} - 2t + 2$.

$h(t) = \dfrac{2t^2 - 3}{3} - 2t + 2 = \dfrac{2}{3}t^2 - 1 - 2t + 2$ donc $h(t) = \dfrac{2}{3}t^2 - 2t + 1$.

La fonction h est une fonction polynôme donc elle est continue et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$.

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h'(t) = \dfrac{4}{3}t - 2$.

D'où $h'(t) = \dfrac{4}{3}t - 2$

4. $k : s \mapsto \frac{2}{3}s^3 - 2s^2 - s$

La fonction k est une fonction polynôme, donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k'(s) = \frac{2}{3} \times 3s^2 - 2 \times 2s - 1 = s^2 - 4s - 1$

D'où $k'(s) = s^2 - 4s - 1$

Exercice 3 :

Déterminons dans chacun des cas, l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculons sa dérivée.

1. $f : x \mapsto \dfrac{5x+3}{x-2}$

Le dénominateur de la fonction f s'annule pour $x = 2$ et le numérateur est définie sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est définie sur l'intervalle $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.

f étant le quotient de deux fonctions polynômes alors elle est dérivable sur son domaine de définition $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(5x+3)'(x-2) - (x-2)'(5x+3)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{5(x-2) - 1(5x+3)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{5x - 10 - 5x - 3}{(x-2)^2} \\ &= \frac{-13}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

D'où, $f'(x) = \dfrac{-13}{(x-2)^2}$

2. $g : x \mapsto \dfrac{-3x^2 + 2x - 7}{2x - 2}$

Déterminons le domaine de définition de la fonction g.

Soit D_g le domaine de définition de g.

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 2 \neq 0\}$.
Posons $2x - 2 = 0$.

$$\begin{aligned} 2x - 2 = 0 &\Leftrightarrow x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

On en déduit donc que $D_g =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.
g est une fonction rationnelle, alors elle est dérivable sur son ensemble de définition D_g.
Et pour tout $x \in D_g =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(-3x^2+2x-7)'(2x-2) - (2x-2)'(-3x^2+2x-7)}{(2x-2)^2} \\ &= \frac{(-6x+2)(2x-2) - 2(-3x^2+2x-7)}{(2x-2)^2} \\ &= \frac{-12x^2+12x+4x-4+6x^2-4x+14}{(2x-2)^2} \\ &= \frac{-6x^2+12x+10}{(2x-2)^2} \end{aligned}$$

D'où, $g'(x) = \dfrac{-6x^2+12x+10}{(2x-2)^2}$

3. $h : x \mapsto 3 - 2x + 5\sqrt{x+1}$
Posons $u(x) = 3 - 2x$ et $v(x) = 5\sqrt{x+1}$
Étudions la dérivabilité de la fonction v.
La fonction $x \mapsto x + 1$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant une fonction polynôme.
Cherchons les x pour lesquels $x + 1 > 0$.
Posons $x + 1 = 0$.
$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
Faisons un tableau de signe.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

Ainsi,pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $x+1>0$

Par conséquent, la fonction v est dérivable sur l'intervalle $x \in]-1, +\infty[$.

Par ailleurs, la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-1, +\infty[$ comme étant une fonction polynôme.

On conclut donc que la fonction h est dérivable sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

Alors, pour tout $x \in]-1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= (3-2x)' + (5\sqrt{x+1})' \\ &= -2 + 5 \times \frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}} \\ &= -2 + 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\ &= -2 + \frac{5}{2\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

D'où $h'(x) = -2 + \dfrac{5}{2\sqrt{x+1}}$

4. $k : x \mapsto \dfrac{-7x^2+14x-12}{2}$

On a: $\dfrac{-7x^2+14x-12}{2} = -\dfrac{7}{2}x^2 + 7x - 6.$

La fonction k est une fonction polynôme alors elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k'(x) = -7x+7$.

D'où $k'(x) = -7x+7$

Exercice 4 :

Soient u, v, w et z des fonctions définies pour tout réel x strictement positif, par :

$$u(x) = -3x+4 \qquad v(x) = 1+\sqrt{x},$$

$$w(x) = x^3 - x^2 \qquad \text{et} \qquad z(x) = -\frac{2}{x}$$

1. Déterminons la dérivée de chacune des fonctions u, v, w et z.

- $u(x) = -3x + 4$ donc $u'(x) = -3$
- $v(x) = 1 + \sqrt{x}$ donc $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $w(x) = x^3 - x^2$ donc $w'(x) = 3x^2 - 2x$
- $z(x) = -\dfrac{2}{x}$
  On a: $z(x) = -2 \times \dfrac{1}{x}$ alors $z'(x) = -2 \times \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{2}{x^2}$
  D'où $z'(x) = \dfrac{2}{x^2}$

2. Donnons l'expression des fonctions f, g et h.

- $f = 3w + u$
  $f(x) = 3(x^3 - x^2) - 3x + 4$
  D'où $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 3x + 4$.
- $g = u - \dfrac{1}{2}z + 2v$

$$\begin{aligned} g(x) &= -3x + 4 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{x}\right) + 2(1 + \sqrt{x}) \\ &= -3x + 4 + \frac{1}{x} + 2 + 2\sqrt{x} \\ &= -3x + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} + 6 \end{aligned}$$

D'où $g(x) = -3x + 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} + 6$

- $h = \dfrac{-u}{2w}$

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-(-3x+4)}{2(x^3-x^2)} \\ &= \frac{3x-4}{2x^3-2x^2} \end{aligned}$$

D'où $h(x) = \dfrac{3x-4}{2x^3-2x^2}$

Déterminons leurs fonctions dérivées.

- $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 3x + 4.$
  $f'(x) = 3 \times 3x^2 - 3 \times 2x - 3$
  D'où $f'(x) = 9x^2 - 6x - 3$
- $g(x) = -3x + 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} + 6$
  $g'(x) = -3 + 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$
  D'où $g'(x) = -3 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$
- $h(x) = \dfrac{3x-4}{2x^3-2x^2}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(3x-4)'(2x^3-2x^2) - (2x^3-2x^2)'(3x-4)}{(2x^3-2x^2)^2} \\ &= \frac{3(2x^3-2x^2) - (6x^2-4x)(3x-4)}{(2x^3-2x^2)^2} \\ &= \frac{6x^3-6x^2-(18x^3-24x^2-12x^2+16x)}{(2x^3-2x^2)^2} \\ &= \frac{6x^3-6x^2-18x^3+36x^2-16x}{(2x^3-2x^2)^2} \\ &= \frac{-12x^3+30x^2-16x}{(2x^3-2x^2)^2} \end{aligned}$$

D'où $h'(x) = \dfrac{-12x^3 + 30x^2 - 16x}{(2x^3 - 2x^2)^2}$

3. Déterminons la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

- $k : x \mapsto \sqrt{3x - 2}$

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{(3x-2)'}{2\sqrt{3x-2}} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} \end{aligned}$$

D'où $k'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}$

- $l : x \mapsto (3x - 2)^2$

$$\begin{aligned} l'(x) &= 2 \times (3x-2)'(3x-2) \\ &= 2 \times 3(3x-2) \\ &= 6(3x-2) \\ &= 18x - 12 \end{aligned}$$

D'où $l'(x) = 18x - 12$

- $m : x \mapsto \dfrac{1}{3x^2 - 2}$

$$\begin{aligned} m'(x) &= \frac{-(3x^2-2)'}{(3x^2-2)^2} \\ &= \frac{-6x}{(3x^2-2)^2} \end{aligned}$$

D'où $m'(x) = \dfrac{-6x}{(3x^2-2)^2}$

Exercice 5 :

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (5x - 3)(-2x + 7).$$

1. Donnons les fonctions u et v telles que $f = uv$.
f est le produit des fonctions u et v donc par identification on obtient:
$u(x) = 5x - 3$ et $v(x) = -2x + 7$

2. Calculer les fonctions dérivées u' et v'.
$u(x) = 5x - 3$ donc $u'(x) = 5$
$v(x) = -2x + 7$ donc $v'(x) = -2$

3. Déduisons la fonction dérivée de f.
$f(x) = u(x)v(x)$ donc $f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$
Alors $f'(x) = 5(-2x+7)-2(5x-3) = -10x+35-10x+6 = -20x+41$
D'où $f'(x) = -20x + 41$

4. Développons l'expression de f puis retrouvons le résultat précédent.

$$\begin{aligned} f(x) &= (5x-3)(-2x+7) \\ &= -10x^2 + 35x + 6x - 23 \\ f(x) &= -10x^2 + 41x - 23 \end{aligned}$$

L'expression développer de f est $f(x) = -10x^2 + 41x - 23$ et on a:
$f'(x) = -10 \times 2x + 41 = -20x + 41$
D'où $f'(x) = -20x + 41$

Exercice 6 :

On considère une fonction f définie pour tout x non nul par:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2}{x}.$$

1. Donnons les fonctions u et v telles que $f = \frac{u}{v}$.
f est le quotient de la fonction u par la fonction v donc par identification on obtient :
$u(x) = -x^2 + 2$ et $v(x) = x$

2. Calculons les fonctions dérivées u' et v'.
$u(x) = -x^2 + 2$ donc $u'(x) = -2x$ et
$v(x) = x$ donc $v'(x) = 1$

3. Déduisons la fonction dérivée de f.

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$

Alors $f'(x) = \dfrac{-2x \times x - 1 \times (-x^2 + 2)}{x^2} = \dfrac{-2x^2 + x^2 - 2}{x^2}$

D'où $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 2}{x^2}$

Exercice 7 :

Déterminons la fonction dérivée de chacune des fonctions ci-dessous en précisant le domaine de définition et de dérivabilité.

1. $f(x) = 5x^2 + 2x - 2$

La fonction f est une fonction polynôme donc elle est continue et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a: $f'(x) = 10x + 2$

2. $g(x) = -\dfrac{5}{2x}$

Le dénominateur de la fonction g s'annule pour $x = 0$ et le numérateur est définie sur $\mathbb{R}$ donc la fonction g est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$.

g est une fonction rationnelle, alors elle est continue et dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a:

$g'(x) = -\dfrac{5}{2} \times \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{5}{2x^2}$

D'où $g'(x) = \dfrac{5}{2x^2}$

3. $h(x) = 7\sqrt{2x}$

On a: $h(x) = 7\sqrt{2x} = 7\sqrt{2} \times \sqrt{x}$

La fonction racine carrée est définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$, mais n'est dérivable que sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Par conséquent, la fonction h est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a:

$h'(x) = 7\sqrt{2} \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{2} \times \sqrt{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{2x}}$.

D'où $h'(x) = \dfrac{7}{\sqrt{2x}}$.

4. $u(x) = 2x - 7\sqrt{x-1}$
La fonction $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ mais est uniquement dérivable sur l'intervalle $]1, +\infty[$ et la fonction $x \mapsto 2x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
On en déduit donc que la fonction u est dérivable sur l'intervalle $]1, +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.
Alors, pour tout $x \in]1, +\infty[$,
$u'(x) = 2 - 7 \times \dfrac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}} = 2 - \dfrac{7}{2\sqrt{x-1}}$.
D'où $u'(x) = 2 - \dfrac{7}{2\sqrt{x-1}}$.

5. $v(x) = x^2 - 3x + \sqrt{3x-2}$
Déterminons le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{3x-2}$.
Soit D ce domaine de définition.
$D = \{x \in \mathbb{R} / 3x - 2 \geq 0\}$
Posons $3x - 2 = 0$.
$3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$.
Faisons un tableau de signe de $x \mapsto 3x - 2$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x-2$		$-$	0	$+$	

Ainsi, pour tout $x \in \left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$, $3x - 2 \geq 0$.
Par conséquent, $D = \left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{3x-2}$ est une fonction racine carrée donc elle est définie D mais n'est dérivable que sur l'intervalle $\left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$.

Par ailleurs, la fonction $x \mapsto x^2 - 3x$ est une fonction polynôme donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur l'intervalle $\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$.

On conclut donc que la fonction v est dérivable sur l'intervalle $\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

Alors, pour tout $x \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$ on a:

$v'(x) = 2x - 3 + \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$.

D'où $v'(x) = 2x - 3 + \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$.

6. $w(x) = -x\pi - \frac{2x}{\sqrt{7}}$

La fonction w est une fonction polynôme donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a: $w'(x) = -\pi - \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Exercice 8 :

Déterminons la fonction dérivée de chacune des fonctions ci-dessous en précisant le domaine de définition et de dérivabilité.

1. $f(x) = (2x-3)^5$

La fonction f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(2x-3)'(2x-3)^4 \\ &= 5 \times 2(2x-3)^4 \\ &= 10(2x-3)^4 \end{aligned}$$

D'où $f'(x) = 10(2x-3)^4$

2. $g(x) = (4-2x)(x^2-2x+5)$

La fonction g est le produit de deux fonctions polynômes donc g est

définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (4-2x)'(x^2-2x+5)+(4-2x)(x^2-2x+5)' \\ &= -2(x^2-2x+5)+(4-2x)(2x-2) \\ &= -2x^2+4x-10+8x-8-4x^2+4x \\ &= -6x^2+16x-18 \end{aligned}$$

D'où $g'(x) = -6x^2+16x-18$

3. $h(x) = \dfrac{3x^2-1}{x^2+1}$
Le numérateur de la fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de plus le dénominateur de la fonction h est définie et strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$.
D'où la fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(3x^2-1)'(x^2+1)-(x^2+1)'(3x^2-1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{6x(x^2+1)-2x(3x^2-1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{6x^3+6x-6x^3+2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{8x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

D'où $h'(x) = \dfrac{8x}{(x^2+1)^2}$

4. $u(x) = \dfrac{12x-5}{2x-3}$
Le dénominateur de la fonction u est une fonction polynôme sui s'annule

pour $x = \dfrac{3}{2}$ et le numérateur est aussi une fonction polynôme donc la fonction u est définie sur l'intervalle $I = \left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.
u est donc dérivable sur l'intervalle I comme quotient de deux fonctions définies et dérivables sur I et dont le dénominateur ne s'annule pas.
Alors, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{(12x-5)'(2x-3)-(2x-3)'(12x-5)}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{12(2x-3)-2(12x-5)}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{24x-36-24x+10}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{-26}{(2x-3)^2} \end{aligned}$$

D'où $u'(x) = \dfrac{-26}{(2x-3)^2}$

5. $v(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{3x-6}$
Le dénominateur de la fonction v est une fonction polynôme qui s'annule pour $x = 2$ et le numérateur est aussi une fonction polynôme, donc la fonction v est définie sur l'intervalle $J =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.
v est donc dérivable sur l'intervalle J comme quotient de deux fonctions définies et dérivables sur J et dont le dénominateur ne s'annule pas.
Alors, pour tout $x \in J$,

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{(x^2+2x-3)'(3x-6)-(3x-6)'(x^2+2x-3)}{(3x-6)^2} \\ &= \frac{(2x+2)(3x-6)-3(x^2+2x-3)}{(3x-6)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{6x^2 - 12x + 6x - 12 - 3x^2 - 6x + 9}{(3x-6)^2} \\ &= \frac{3x^2 - 12x - 3}{(3x-6)^2} \end{aligned}$$

D'où $v'(x) = \dfrac{3x^2 - 12x - 3}{(3x-6)^2}$

6. $w(x) = \dfrac{4}{3-4x}$
Le dénominateur de la fonction w est une fonction polynôme qui s'annule pour $x = \dfrac{3}{4}$ et le numérateur est aussi une fonction polynôme, donc la fonction w est définie sur l'intervalle $K = \left]-\infty, \dfrac{3}{4}\right[\cup \left]\dfrac{3}{4}, +\infty\right[$.
w est donc dérivable sur l'intervalle K comme quotient de deux fonctions définies et dérivables sur K et dont le dénominateur ne s'annule pas. Alors, pour tout $x \in K$, on a:

$$\begin{aligned} w'(x) &= 4 \times \frac{-(3-4x)'}{(3-4x)^2} \\ &= 4 \times \frac{4}{(3-4x)^2} \\ &= \frac{16}{(3-4x)^2} \end{aligned}$$

D'où $w'(x) = \dfrac{16}{(3-4x)^2}$

Exercice 9 :

Déterminons le sens de variation de chacune des fonctions ci-dessous sur le domaine indiqué.

1. $f_1(x) = \dfrac{-1}{2x-2}$ pour tout $x \in]1; +\infty[$.
Le dénominateur de la fonction f_1 est une fonction polynôme qui est dérivable et ne s'annule pas sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Ainsi, la fonction f_1 est dérivable, comme l'inverse d'une fonction dérivable et qui ne s'annule pas sur $]1;+\infty[$.
Alors, pour tout $x \in]1;+\infty[$, $f_1'(x) = \dfrac{2}{(2x-2)^2}$.
Étudions le signe de $f_1'(x)$:
$f_1'(x) = \dfrac{2}{(2x-2)^2}$.
On sait que pour tout $x \in]1;+\infty[$, $(2x-2)^2 > 0$ et $2 > 0$ donc $f_1'(x) > 0$ pour tout $x \in]1;+\infty[$.
Par conséquent, la fonction f_1 est strictement croissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$

2. $f_2(x) = -3\sqrt{3x+2}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
La fonction $x \mapsto 3x+2$ est une fonction polynôme strictement positif sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
Par conséquent, la fonction f_2 est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme racine carrée d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a:

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= -3 \times \frac{(3x+2)'}{2\sqrt{3x+2}} \\ &= \frac{-3 \times 3}{2\sqrt{3x+2}} \\ f_2'(x) &= \frac{-9}{2\sqrt{3x+2}} \end{aligned}$$

Étudions le signe de $f_2'(x)$:
$f_2'(x) = \dfrac{-9}{2\sqrt{3x+2}}$
On sait que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $2\sqrt{3x+2} > 0$ donc $f_2'(x)$ a le signe du numérateur.
$-9 < 0$ donc pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f_2'(x) < 0$.
D'où la fonction f_2 est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. $f_3(x) = 3x^2 + 5x - 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction f_3 est une fonction polynôme donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_3'(x) = 6x + 5$
Étudions le signe de $f_3'(x)$:
Posons $f_3'(x) = 0$.
$f_3'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{6}$.
Faisons un tableau de signe:

x	$-\infty$		$-\dfrac{5}{6}$		$+\infty$
f_3'		$-$	0	$+$	

Ainsi, pour tout $x \in]-\infty, -\dfrac{5}{6}[$, $f_3'(x) < 0$ et pour tout $x \in]-\dfrac{5}{6}, +\infty[$, $f_3'(x) > 0$.
D'où la fonction f_3 est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty, -\dfrac{5}{6}\right[$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\dfrac{5}{6}, +\infty\right[$

4. $f_4(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto x^2 + 5$ est une fonction polynôme strictement positive sur l'ensemble $\mathbb{R}$.
Par conséquent, la fonction f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme racine carrée d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur l'ensemble $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \frac{(x^2+5)'}{2\sqrt{x^2+5}} \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} \\ f_4'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \end{aligned}$$

Étudions le signe de $f_4'(x)$.
$f_4'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$
On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+5} > 0$ donc $f_4'(x)$ a le signe du numérateur.
Or pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $x < 0$, donc $f_4'(x) < 0$
Et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $x > 0$ donc $f_4'(x) > 0$.
D'où la fonction f_4 est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ et est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

