TRIGONOMÉTRIE (II)

CORRECTION DES EXERCICES

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Exercice 1 :

Résolvons l'équation $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \cos(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\\ &\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\\ &\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

1. lorsque x appartient à l'intervalle $[0;\pi]$;

On a :

- $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \in [0;\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \in [0;\pi] &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi\\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{5}{6} + 2k \leq 1\\ &\Leftrightarrow -\frac{5}{6} \leq 2k \leq 1 - \frac{5}{6}\\ &\Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{1}{12}\\ &\Leftrightarrow -0,417 \leq k \leq 0,083\\ &\Leftrightarrow k = 0\end{aligned}$$

$k = 0$ alors on a $x = \frac{5\pi}{6} + 2 \times 0 \times \pi = \frac{5\pi}{6}$ d'où $x = \frac{5\pi}{6}$.

- $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \in [0; \pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \in [0;\pi] &\Leftrightarrow 0 \leq -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi \\ &\Leftrightarrow 0 \leq -\frac{5}{6} + 2k \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{6} \leq 2k \leq 1 + \frac{5}{6} \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{12} \leq k \leq \frac{11}{12} \\ &\Leftrightarrow 0,417 \leq k \leq 0,917 \end{aligned}$$

D'où l'entier k n'existe donc pas.

Ainsi, $x = \frac{5\pi}{6}$ est une solution unique de l'équation sur l'intervalle $[0; \pi]$

2. lorsque x appartient à l'intervalle $\left]-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

On a :

- $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \in \left]-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \in \left]-\pi; \frac{\pi}{2}\right] &\Leftrightarrow -\pi < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow -1 < \frac{5}{6} + 2k \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -1 - \frac{5}{6} < 2k \leq \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \\ &\Leftrightarrow -\frac{11}{6} < 2k \leq -\frac{2}{6} \\ &\Leftrightarrow -\frac{11}{12} < k \leq -\frac{1}{6} \\ &\Leftrightarrow -0,917 < k \leq -0,167 \end{aligned}$$

D'où l'entier k n'existe donc pas.

- $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \in \left]-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \in \left]-\pi; \frac{\pi}{2}\right] &\Leftrightarrow -\pi < -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{2} \\
&\Leftrightarrow -1 < -\frac{5}{6} + 2k \leq \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow -1 + \frac{5}{6} < 2k \leq \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{6} < 2k \leq \frac{8}{6} \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{12} < k \leq \frac{8}{12} \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{12} < k \leq \frac{2}{3} \\
&\Leftrightarrow -0,083 < k \leq 0,667 \\
&\Leftrightarrow k = 0
\end{aligned}$$

$k = 0$ alors on a $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2 \times 0 \times \pi = -\dfrac{5\pi}{6}$.

D'où $x = -\dfrac{5\pi}{6}$

Ainsi, $x = -\dfrac{5\pi}{6}$ est une solution unique de l'équation sur l'intervalle $\left]-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 2 :

1. On considère un nombre réel x de l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = \dfrac{1}{4}$

a. Déterminons la valeur la valeur exacte de $\cos(x)$.
On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$.

$$\begin{aligned}\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) &\Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 - \frac{1}{16} \\ &\Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{15}{16} \\ &\Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{\sqrt{15}}{4} \text{ ou } \cos(x) = \frac{\sqrt{15}}{4}\end{aligned}$$

Le réel x appartient à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(x) > 0$ d'où $\cos(x) = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Par conséquent, la valeur exacte de $\cos(x)$ est $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

b. Déterminons, à l'aide de la calculatrice en mode radian, une valeur approchée de x au millième près.

c. Vérifier à l'aide de la calculatrice le résultat obtenu à la question a.

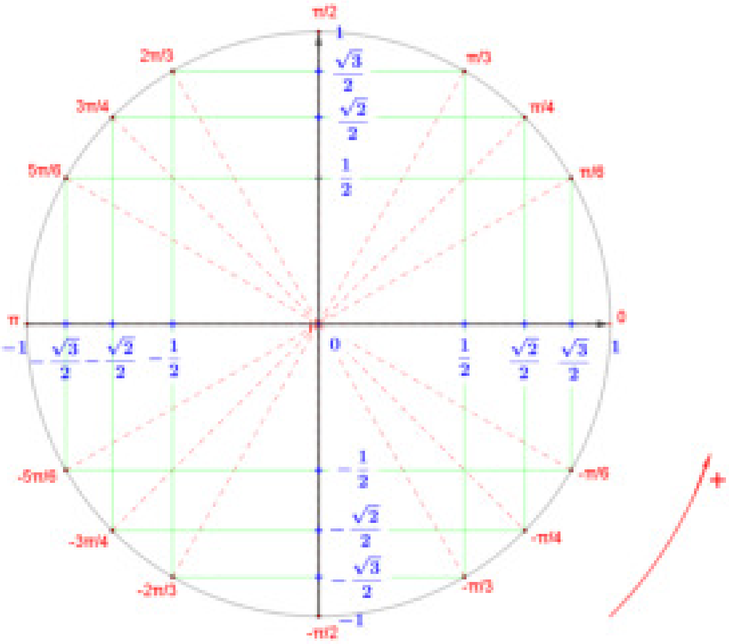
2. Déterminons la valeur exacte de $\cos(x)$ avec x un nombre réel de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = -0,8$.
On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$.

$$\begin{aligned}\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) &\Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 - (0,8)^2 \\ &\Leftrightarrow \cos^2(x) = 0,1 - 0,64 \\ &\Leftrightarrow \cos^2(x) = 0,36 \\ &\Leftrightarrow \cos(x) = 0,6 \text{ ou } \cos(x) = -0,6\end{aligned}$$

Le réel x appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(x) > 0$ d'où $\cos(x) = 0,6$.
Par conséquent, la valeur exacte de $\cos(x)$ est $0,6$

Exercice 3 :

Déterminons dans chaque cas, le ou les nombres réels x vérifiant la condition donnée.



1. $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$ et $x \in [0;\pi]$.

En s'aidant du cercle trigonométrique ci-dessus, on remarque que:
$\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$ lorsque $x = \dfrac{2\pi}{3}$ et lorsque $x = -\dfrac{2\pi}{3}$.
x étant dans l'intervalle $[0;\pi]$, alors la valeur de x qui convient est $x = \dfrac{2\pi}{3}$.
D'où $\dfrac{2\pi}{3}$ est l'unique solution de l'équation $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$ lorsque $x \in [0;\pi]$.

2. $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

A partir du cercle trigonométrique ci-dessus, on remarque que:
$\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ lorsque $x = -\dfrac{3\pi}{4}$ et lorsque $x = -\dfrac{\pi}{4}$.
x étant dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, alors la valeur de x qui convient est $x = -\dfrac{\pi}{4}$. D'où $-\dfrac{\pi}{4}$ est l'unique solution de l'équation $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

lorsque $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
A partir du cercle trigonométrique ci-dessus, on remarque que:
$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ lorsque $x = -\frac{\pi}{6}$ et lorsque $x = \frac{\pi}{6}$.
x étant dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, alors les deux valeurs $x = -\frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{6}$ conviennent.
D'où $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ sont les solutions de l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ lorsque $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

4. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.
A partir du cercle trigonométrique ci-dessus, on remarque que:
$\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lorsque $x = -\frac{3\pi}{4}$ et lorsque $x = -\frac{\pi}{4}$.
x étant dans l'intervalle $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$, alors la valeur de x qui convient est $x = -\frac{3\pi}{4}$.
D'où $-\frac{3\pi}{4}$ est l'unique solution de l'équation $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lorsque $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

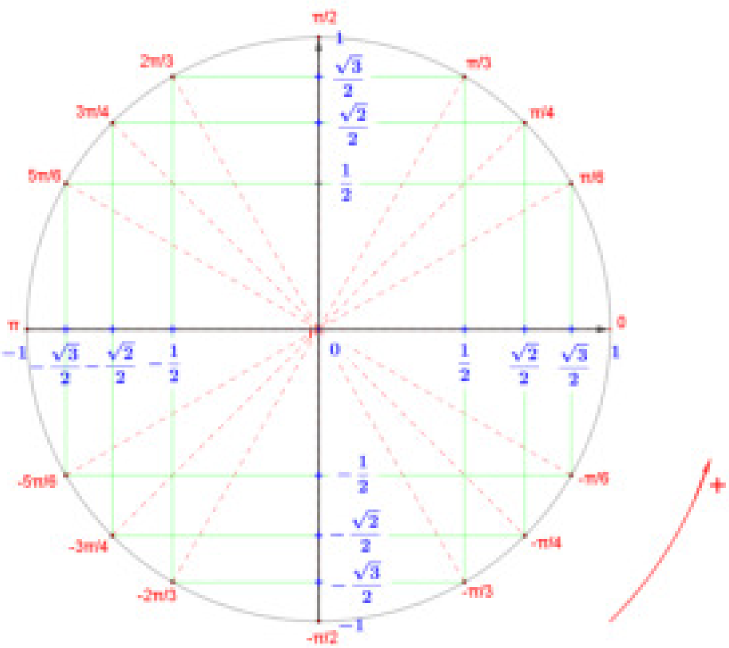
5. $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $x \in [-\pi; \pi]$.
$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
A partir du cercle trigonométrique ci-dessus, on remarque que:
$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lorsque $x = -\frac{\pi}{4}$ et lorsque $x = \frac{\pi}{4}$.

x étant dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$, alors les deux valeurs $x = -\dfrac{\pi}{4}$ et $x = \dfrac{\pi}{4}$ conviennent.
D'où $-\dfrac{\pi}{4}$ et $x = \dfrac{\pi}{4}$ sont les solutions de l'équation $\cos(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ lorsque $x \in [-\pi;\pi]$.

6. $\cos(x) = -1$ et $x \in [-\pi;\pi]$.
A partir du cercle trigonométrique ci-dessus, on remarque que:
$\cos(x) = -1$ lorsque $x = -\pi$ et lorsque $x = \pi$.
x étant dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$, alors les deux valeurs $x = -\pi$ et $x = \pi$ conviennent.
D'où $-\pi$ et π sont les solutions de l'équation $\cos(x) = -1$ lorsque $x \in [-\pi;\pi]$

Exercice 4 :

Déterminons dans chaque cas, le ou les nombres réels x vérifiant la condition donnée.



1. $-2\sin(x) + 1 = -1$ et $x \in [0;\pi[$.
On a: $-2\sin(x) + 1 = -1 \Leftrightarrow -2\sin(x) = -2 \Leftrightarrow \sin(x) = 1$.

A partir du cercle trigonométrique ci-dessus,
la seule valeur de x vérifiant la condition $\sin(x) = 1$ est $\frac{\pi}{2}$.
Et $\frac{\pi}{2} \in [0; \pi[$, d'où l'équation admet $\frac{\pi}{2}$ comme solution unique.

2. $1 - \cos(3x) = 0$ et $x \in [-\pi; \pi[$.

$$\begin{aligned} 1 - \cos(3x) = 0 &\Leftrightarrow \cos(3x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(0) \\ &\Leftrightarrow 3x = 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Déterminons les valeurs de k pour lesquels $x \in [-\pi; \pi[$.

$$\begin{aligned} x \in [-\pi; \pi[&\Leftrightarrow -\pi \leq \frac{2k\pi}{3} < \pi \\ &\Leftrightarrow -1 \leq \frac{2k}{3} < 1 \\ &\Leftrightarrow -3 \leq 2k < 3 \\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq k < \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow -1.5 \leq k < 1.5 \end{aligned}$$

k étant un entier alors $k = -1$, $k = 0$ et $k = 1$.

- Pour $k = -1$ on a $x = \frac{2 \times (-1) \times \pi}{3}$ donc $x = -\frac{2\pi}{3}$.
- Pour $k = 0$ on a $x = \frac{2 \times 0 \times \pi}{3}$ donc $x = 0$.
- Pour $k = 1$ on a $x = \frac{2 \times 1 \times \pi}{3}$ donc $x = \frac{2\pi}{3}$

Ainsi, $0, -\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ sont les solutions de l'équation $1 - \cos(3x) = 0$ lorsque $x \in [-\pi; \pi[$

3. $\cos(x) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ et $x \in [0;\pi]$.

$\cos(x) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Or à partir du tableau trigonométrique ci-dessus,

les seuls valeurs vérifiant la condition $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sont $\dfrac{3\pi}{4}$ et $-\dfrac{3\pi}{4}$.

x étant dans l'intervalle $[0;\pi]$, seule la valeur $x = \dfrac{3\pi}{4}$ convient.

D'où $\dfrac{3\pi}{4}$ est l'unique solution de l'équation $\cos(x) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ lorsque $x \in [0;\pi]$.

4. $(2\sin(x))^2 - 3 = 0$ et $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4};\pi\right[$.

On a : $(2\sin(x))^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2(x) = 3 \Leftrightarrow \sin^2(x) = \dfrac{3}{4}$

donc $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

- Lorsque $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
  A partir du cercle trigonométrique ci-dessus,
  les valeurs de x vérifiant la condition $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont $x = -\dfrac{2\pi}{3}$ et $x = -\dfrac{\pi}{3}$.
  Or aucune de ces deux valeurs n'appartient à l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{4};\pi\right[$.
  Ainsi, l'équation $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ n'admet aucune solution dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{4};\pi\right[$.
- Lorsque $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
  A partir du cercle trigonométrique ci-dessus,

les valeurs de x vérifiant la condition $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sont $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.
Les valeurs $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ appartiennent à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4};\pi\right[$ donc elles sont solutions de l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

En somme, les solutions de l'équation $(2\sin(x))^2 - 3 = 0$ lorsque $x \in \left[-\frac{\pi}{4};\pi\right[$ sont $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

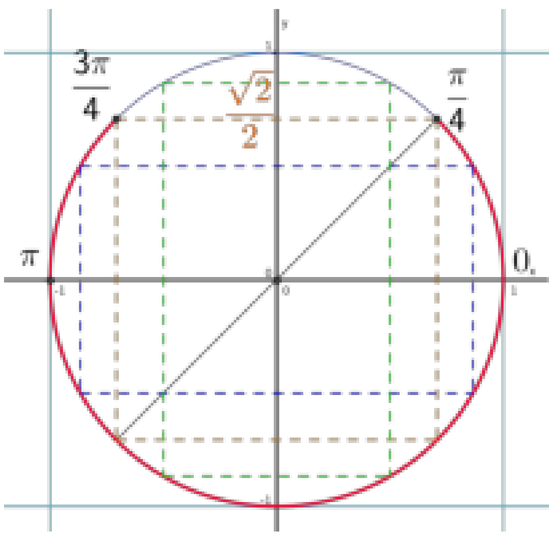
Exercice 5 :

Résolvons dans $[0;2\pi]$ les inéquations suivantes, à l'aide du cercle trigonométrique.

1. $2\sin(x) - \sqrt{2} \leq 0$.

$$\begin{aligned} 2\sin(x) - \sqrt{2} \leq 0 &\Leftrightarrow 2\sin(x) \leq \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin(x) \leq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Les réels solutions de cette inéquation sont les réels dont les points images sont sur la partie colorée en rouge sur cercle trigonométrique ci-dessous (les extrémités inclues).



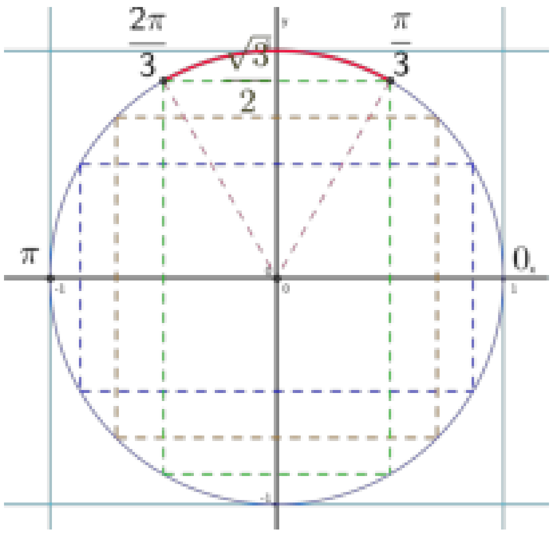
La partie du cercle trigonométrique colorée en rouge sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ correspond à l'ensemble : $\left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; 2\pi\right]$.

D'où $\left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; 2\pi\right]$ est la partie solution de l'inéquation.

2. $2\sin(x) - \sqrt{3} \geq 0$.

$$\begin{aligned} 2\sin(x) - \sqrt{3} \geq 0 &\Leftrightarrow 2\sin(x) \geq \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \sin(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin(x) \geq \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Les réels solutions de cette inéquation sont les réels dont les points images sont sur la partie colorée en rouge sur cercle trigonométrique ci-dessous (les extrémités inclues).



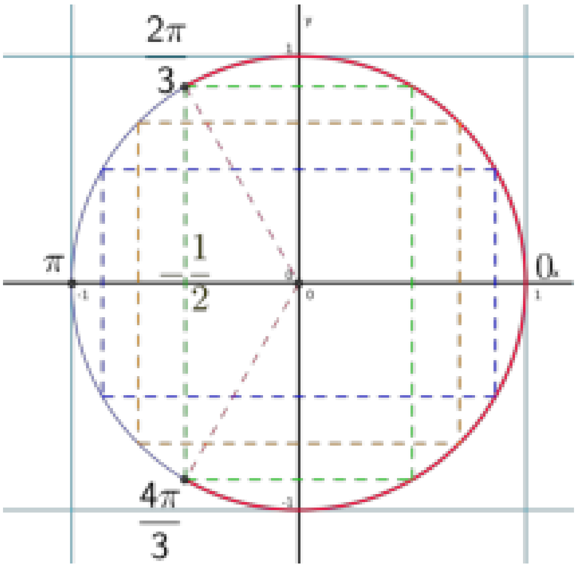
La partie du cercle trigonométrique colorée en rouge sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ correspond à l'ensemble : $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

D'où $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$ est la partie solution de l'inéquation.

3. $\cos(x) > -\frac{1}{2}$.

$\cos(x) > -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x) > \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Les réels solutions de cette inéquation sont les réels dont les points images sont sur la partie colorée en rouge sur cercle trigonométrique ci-dessous (les extrémités exclues).



La partie du cercle trigonométrique colorée en rouge sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ correspond à l'ensemble $\left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{4\pi}{3}; 2\pi\right]$.

D'où $\left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{4\pi}{3}; 2\pi\right]$ est la partie solution de l'inéquation.

Exercice 6 :

Résolvons dans $]-\pi; \pi]$ l'équation $\cos(3x) = \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\cos(3x) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Déterminons les valeurs de k pour lesquels $x \in]-\pi; \pi]$.

- lorsque $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$

$$\begin{aligned} x \in]-\pi;\pi] &\Leftrightarrow -\pi < \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \leq \pi \\ &\Leftrightarrow -1 < \frac{1}{9} + \frac{2}{3}k \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -1 - \frac{1}{9} < \frac{2}{3}k \leq 1 - \frac{1}{9} \\ &\Leftrightarrow -\frac{10}{9} < \frac{2}{3}k \leq \frac{8}{9} \\ &\Leftrightarrow -\frac{10}{9} \times \frac{3}{2} < k \leq \frac{8}{9} \times \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{5}{3} < k \leq \frac{4}{3} \\ &\Leftrightarrow -1,667 < k \leq 1,333 \end{aligned}$$

k étant un entier alors $k = -1$, $k = 0$ et $k = 1$.

- Pour $k = -1$, $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3} \times (-1) \times \pi = \frac{\pi}{9} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi - 6\pi}{9}$ donc $x = -\frac{5\pi}{9}$
- Pour $k = 0$, $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3} \times 0 \times \pi$ donc $x = \frac{\pi}{9}$
- Pour $k = 1$, $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3} \times 1 \times \pi = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi + 6\pi}{9}$ donc $x = \frac{7\pi}{9}$

- lorsque $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$.

$$\begin{aligned} x \in]-\pi;\pi] &\Leftrightarrow -\pi < -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \leq \pi \\ &\Leftrightarrow -1 < -\frac{1}{9} + \frac{2}{3}k \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -1 + \frac{1}{9} < \frac{2}{3}k \leq 1 + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{8}{9} < \frac{2}{3}k \leq \frac{10}{9}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{8}{9} \times \frac{3}{2} < k \leq \frac{10}{9} \times \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{4}{3} < k \leq \frac{5}{3}$$
$$\Leftrightarrow -1,333 < k \leq 1,667$$

k étant un entier alors $k = -1$, $k = 0$ et $k = 1$.

- Pour $k = -1$, $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3} \times (-1) \times \pi = -\frac{\pi}{9} - \frac{2\pi}{3} = \frac{-\pi - 6\pi}{9}$ donc $x = -\frac{7\pi}{9}$
- Pour $k = 0$, $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3} \times 0 \times \pi$ donc $x = -\frac{\pi}{9}$
- Pour $k = 1$, $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3} \times 1 \times \pi = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{-\pi + 6\pi}{9}$ donc $x = \frac{5\pi}{9}$

En somme, les solutions de l'équation $\cos(3x) = \frac{1}{2}$ lorsque $x \in]-\pi; \pi]$ sont: $-\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{9}; -\frac{5\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; -\frac{7\pi}{9}$ et $\frac{7\pi}{9}$

Exercice 7 :

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $(E) : 2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0$.

1. Posons $X = \sin(x)$ et donnons une nouvelle expression de (E).
En posant $X = \sin(x)$ l'équation (E) devient : $2X^2 - 3X + 1 = 0$

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ cette nouvelle équation.
L'équation $2X^2 - 3X + 1 = 0$ est une équation du second degré.
Alors soit Δ le discriminant de cette équation.
$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(1) = 9 - 8 = 1^2$.
$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes:

$X_1 = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $X_2 = \dfrac{3+1}{4} = 1$.

Ainsi, $\dfrac{1}{2}$ et 1 sont les solutions de l'équation $2X^2 - 3X + 1 = 0$.

3. Déduisons les solutions de l'équation (E).

$X_1 = \dfrac{1}{2}$ et $X_2 = 1$ sont les solutions de l'équation $2X^2 - 3X + 1 = 0$.

Sachant que $X = \sin(x)$ on a donc: $X_1 = \sin(x_1)$ et $X_2 = \sin(x_2)$ où x_1 et x_2 sont des réels

- $\sin(x_1) = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\sin(x_1) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \sin(x_1) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x_1 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

- $\sin(x_2) = 1$

$$\begin{aligned}\sin(x_2) = 1 &\Leftrightarrow \sin(x_2) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &\Leftrightarrow x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x_2 = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Soit S l'ensemble solution de l'équation (E).

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 8 :

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation:

$$(E') : 2\cos^2(x) - (2+\sqrt{2})\cos(x) + \sqrt{2} = 0$$

1. En posant $X = \cos(x)$, donnons une nouvelle expression de (E).
En posant $X = \cos(x)$, l'équation (E') devient :
$2X^2 - (2+\sqrt{2})X + \sqrt{2} = 0$

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ cette nouvelle équation.
L'équation $2X^2 - (2+\sqrt{2})X + \sqrt{2} = 0$ est une équation du second degré.
Alors soit Δ le discriminant de cette équation.
$\Delta = (2+\sqrt{2})^2 - 4(2)(\sqrt{2}) = 4 + 4\sqrt{2} + 2 - 8\sqrt{2} = 4 - 4\sqrt{2} + 2$
D'où $\Delta = (2-\sqrt{2})^2$
$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
$X_1 = \dfrac{(2+\sqrt{2}) - (2-\sqrt{2})}{4} = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et
$X_2 = \dfrac{(2+\sqrt{2}) + (2-\sqrt{2})}{4} = \dfrac{4}{4} = 1.$
Ainsi, 1 et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sont les solutions de l'équation
$2X^2 - (2+\sqrt{2})X + \sqrt{2} = 0.$

3. Déduisons les solutions de l'équation (E').
$X_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $X_2 = 1$ sont les solutions de l'équation
$2X^2 - (2+\sqrt{2})X + \sqrt{2} = 0.$
Sachant que $X = \cos(x)$ on a donc: $X_1 = \cos(x_1)$ et $X_2 = \cos(x_2)$ où x_1 et x_2 sont des réels.

- $\cos(x_1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned}\cos(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow \cos(x_1) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

- $\cos(x_2) = 1$

$$\begin{aligned}\cos(x_2) = 1 &\Leftrightarrow \cos(x_2) = \cos(0)\\ &\Leftrightarrow x_2 = 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Soit S' l'ensemble solution de l'équation (E').

$$S' = \left\{2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$