DÉRIVATION LOCALE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan. Soit a un réel appartenant à l'intervalle I et A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a.

Définition:

Soit h un réel non nul tel que $a+h \in I$ et $a \neq a+h$.
On appelle **taux de variation** ou encore **taux d'accroissement** de f entre a et $a+h$ le nombre :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Méthode et exemple:

Pour calculer le taux de variation d'une fonction f entre a et $a+h$, il faut:

- Calculer $f(a)$
- Calculer $f(a+h)$
- Calculer le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et le simplifier.

Déterminons le taux de variation de la fonction $f(x) = x^2+1$ entre 1 et $1+h$ où h est un réel non nul.

- $f(1) = 1^2+1 = 2$
- $f(1+h) = (1+h)^2+1 = 1+2h+h^2+1 = h^2+2h+2$
- Enfin, $\tau(h) = \dfrac{h^2+2h+2-2}{h} = \dfrac{h^2+2h}{h} = h+2$

Donc le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ est $\tau(h) = h+2$

©Cours Galilée *Toute reproduction, même partielle, est strictement interdite.*

Définition:

On dit que la fonction f est **dérivable** en a, lorsque $\tau(h)$ tend vers un nombre réel, quand h tend vers 0. Ce réel est appelé le **nombre dérivée** de la fonction f en a et est noté $f'(a)$.
On écrit alors :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

.

Méthode:

Pour savoir si une fonction f est dérivable en a il faut:

- Calculer le taux de variation $\tau(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Chercher la limite du taux de variation $\tau(h)$ quand h tend vers 0 c'est-à-dire: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Conclure:
  - si la limite existe et est finie, alors f est dérivable en a.
  - sinon, f n'est pas dérivable en a.

Exemple:

Vérifions si la fonction $f(x) = x^2 + 1$ est dérivable en 1.
De l'exemple précédent, la fonction f a pour taux de variation entre 1 et $1 + h$, $\tau(h) = h + 2$.
On a: $\lim\limits_{h \to 0} h + 2 = 2$
On conclut donc que la fonction f est bien dérivable en 1.