SUITES NUMÉRIQUES(I)

CORRECTION DES EXERCICES

VARIATIONS D'UNE SUITE AVEC LA MÉTHODE DU QUOTIENT

Déterminons les variations de la suite (u_n) à l'aide d'un quotient de termes.

Exercice 1 :

$u_n = \dfrac{2}{n^2-4}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 3$.

On a: $u_{n+1} = \dfrac{2}{(n+1)^2-4}$

Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{2}{(n+1)^2-4}}{\dfrac{2}{n^2-4}} = \dfrac{2}{(n+1)^2-4} \times \dfrac{n^2-4}{2}$

Donc pour tout $n \geq 3$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n^2-4}{(n+1)^2-4}$

Or pour tout $n \geq 3$ on a:

$$\begin{aligned}
3 \leq & n < n+1 \Leftrightarrow \\
9 \leq & n^2 < (n+1)^2 \Leftrightarrow \\
5 \leq & n^2 - 4 < (n+1)^2 - 4 \Leftrightarrow \\
\frac{n^2-4}{(n+1)^2-4} & < 1 \text{ car } (n+1)^2 - 4 > 5 > 0 \Leftrightarrow \\
\frac{u_{n+1}}{u_n} & < 1
\end{aligned}$$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$ pour tout $n \geq 3$.

Exercice 2 :

$u_n = \dfrac{5^{n+2}}{4^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

On a: $u_{n+1} = \dfrac{5^{n+3}}{4^{n+1}}$

Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{5^{n+3}}{4^{n+1}}}{\dfrac{5^{n+2}}{4^n}} = \dfrac{5^{n+3}}{4^{n+1}} \times \dfrac{4^n}{5^{n+2}} = \dfrac{5^{n+2} \times 5 \times 4^n}{4^n \times 4 \times 5^{n+2}} = \dfrac{5}{4}$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{5}{4} > 1$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 3 :

$u_0 = 12$ et $u_{n+1} = 0,25u_n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

On a: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0,25$

Or $0,25 < 1$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 4 :

$u_1 = \dfrac{2}{5}$ et $u_{n+1} = 5n \times u_n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

On a: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 5n$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $n > 1 \Leftrightarrow 5n > 5 > 1$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

Exercice 5 :

$u_2 = 7$ et $u_n = \dfrac{1}{n}u_{n-1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

On a: $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{1}{n}$

Or pour tout $n \geq 2$ $n > 1 \Leftrightarrow 1 > \dfrac{1}{n}$ donc $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} < 1$

$\dfrac{u_n}{u_{n-1}} < 1$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante pour tout $n \geq 2$.