SUITES NUMÉRIQUES(I)

CORRECTION DES EXERCICES

VARIATIONS D'UNE SUITE AVEC LA MÉTHODE DE LA DIFFÉRENCE

Déterminer les variations de la suite (u_n) à l'aide d'une différence de termes.

Exercice 1 :

$u_n = -4n + 7$ avec $n \in \mathbb{N}$.
On a: $u_{n+1} = -4(n+1) + 7 = -4n - 4 + 7 = -4n + 3$
Calculons $u_{n+1} - u_n$ puis observons son signe.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -4n + 3 - (-4n + 7) \\ &= -4n + 3 + 4n - 7 \\ u_{n+1} - u_n &= -4 \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n = -4$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ d'où $u_{n+1} < u_n$
$u_{n+1} < u_n$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 2 :

$u_n = 5^{n+1} - 5^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
On a: $u_{n+1} = 5^{n+1+1} - 5^{n+1} = 5^{n+2} - 5^{n+1}$

Calculons $u_{n+1} - u_n$ puis observons son signe.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 5^{n+2} - 5^{n+1} - (5^{n+1} - 5^n) \\ &= 5^{n+2} - 5^{n+1} - 5^{n+1} + 5^n \\ &= 5^{n+2} - 2 \times 5^{n+1} + 5^n \\ &= 5^n \times 5^2 - 2 \times 5^n \times 5 + 5^n \\ &= 5^n(5^2 - 2 \times 5 + 1) \\ &= 5^n(25 - 10 + 1) \\ u_{n+1} - u_n &= 16 \times 5^n \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n = 16 \times 5^n$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $16 > 0$ et $5^n > 0$ d'où $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
$u_{n+1} > u_n$ donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 3 :

$u_n = n^3 + 2n - 3$ avec $n \in \mathbb{N}$.
On a: $u_{n+1} = (n+1)^3 + 2(n+1) - 3 = (n+1)^3 + 2n - 1$
Calculons $u_{n+1} - u_n$ puis observons son signe.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^3 + 2n - 1 - (n^3 + 2n - 3) \\ &= (n+1)^3 + 2n - 1 - n^3 - 2n + 3 \\ &= (n+1)^3 - n^3 + 2 \\ u_{n+1} - u_n &= (n+1)^3 - n^3 + 2 \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n = (n+1)^3 - n^3 + 2$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}, n+1 > n \Leftrightarrow (n+1)^3 > n^3 \Leftrightarrow (n+1)^3 - n^3 > 0$
Donc $(n+1)^3 - n^3 + 2 > 0$ d'où $u_{n+1} - u_n > 0$
Ainsi, $u_{n+1} > u_n$ donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 4 :

$u_n = (3-n)^3$ avec $n \in \mathbb{N}$.
On a: $u_{n+1} = (3-(n+1))^3 = (2-n)^3$
Calculons $u_{n+1} - u_n$ puis observons son signe.

$u_{n+1} - u_n = (2-n)^3 - (3-n)^3$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 - n < 3 - n \Leftrightarrow (2-n)^3 < (3-n)^3 \Leftrightarrow (2-n)^3 - (3-n)^3 < 0$
Ainsi, $u_{n+1} - u_n < 0$
$u_{n+1} < u_n$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 5 :
$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n - 9n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
On a: $u_{n+1} - u_n = -9n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ $-9n < 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$
Ainsi, $u_{n+1} < u_n$ d'où la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 6 :
$u_0 = \frac{3}{4}$ et $u_{n+1} = 2n^2 + u_n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
On a: $u_{n+1} - u_n = 2n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ $2n^2 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$
Ainsi, $u_{n+1} > u_n$ d'où la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 7 :
$u_1 = 5.25$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{5}{n^2}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
On a: $u_{n+1} - u_n = -\frac{5}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ $-\frac{5}{n^2} < 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$
Ainsi, $u_{n+1} < u_n$ d'où la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.