SUITES NUMÉRIQUES (I)

CORRECTION DES EXERCICES

1 FORMES EXPLICITES ET RÉCURRENTES

Exercice 1 :

1. Indiquons, pour chacune des suites ci-dessous si elle est définie par une formule explicite ou par une relation de récurrence.

a. $u_n = 7n^2 + 1$ pour tout entier naturel n.
u_n est définie par une formule explicite.

b. $v_n = 3n - 2$ pour tout entier naturel n.
v_n est définie par une formule explicite.

c. $\begin{cases} w_0 = -3 \\ w_{n+1} = 2w_n + 5 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$
w_n est définie par une relation de récurrence.

d. $x_n = 6$ pour tout entier naturel n.
x_n est définie par une formule explicite.

e. $\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_n = \dfrac{3}{2}t_{n-1} - 2 \text{ pour tout entier naturel } n > 1. \end{cases}$
t_n est définie par une relation de récurrence.

f. $\begin{cases} k_0 = 7 \\ k_{n+1} = 2(n+1) - k_n \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$
k_n est définie par une relation de récurrence.

2. Déterminons pour chacune des suites précédentes les trois premiers termes puis le cinquième terme.

a. $u_n = 7n^2 + 1$ pour tout entier naturel n.

- $u_0 = 7 \times (0)^2 + 1 = 1$ donc $u_0 = 1$
- $u_1 = 7 \times (1)^2 + 1 = 8$ donc $u_1 = 8$
- $u_2 = 7 \times (2)^2 + 1 = 29$ donc $u_2 = 29$

Le cinquième terme de u_n est : u_4
On a : $u_4 = 7 \times (4)^2 + 1 = 113$ donc $u_4 = 113$

b. $v_n = 3n - 2$ pour tout entier naturel n.

- $v_0 = 3 \times 0 - 2 = -2$ donc $v_0 = -2$
- $v_1 = 3 \times 1 - 2 = 3 - 2 = 1$ donc $v_1 = 1$
- $v_2 = 3 \times 2 - 2 = 6 - 2 = 4$ donc $v_2 = 4$

Le cinquième terme de v_n est : v_4
On a : $v_4 = 3 \times 4 - 2 = 12 - 2 = 10$ donc $v_4 = 10$

c. $\begin{cases} w_0 = -3 \\ w_{n+1} = 2w_n + 5 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$

- $w_0 = -3$
- $w_1 = w_{0+1} = 2w_0 + 5 = 2 \times (-3) + 5 = -6 + 5 = -1$
  Donc $w_1 = -1$
- $w_2 = w_{1+1} = 2w_1 + 5 = 2 \times (-1) + 5 = -2 + 5 = 3$
  Donc $w_2 = 3$

Le cinquième terme de w_n est: w_4
On a $w_4 = w_{3+1} = 2w_3 + 5$
Calculons w_3
$w_3 = w_{2+1} = 2w_2 + 5 = 2 \times 3 + 5 = 11$
Donc $w_4 = 2 \times 11 + 5 = 22 + 5 = 27$
D'où $w_4 = 27$

d. $x_n = 6$ pour tout entier naturel n.

- $x_0 = 6$
- $x_1 = 6$
- $x_2 = 6$

Le cinquième terme de x_n est: x_4

$x_4 = 6$

e. $\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_n = \dfrac{3}{2}t_{n-1} - 2 \text{ pour tout entier naturel } n > 1. \end{cases}$

- $t_1 = 2$
- $t_2 = \dfrac{3}{2}t_{2-1} - 2 = \dfrac{3}{2}t_1 - 2 = \dfrac{3}{2} \times 2 - 2 = 1$
  Donc $t_2 = 1$
- $t_3 = \dfrac{3}{2}t_{3-1} - 2 = \dfrac{3}{2}t_2 - 2 = \dfrac{3}{2} \times 1 - 2 = -\dfrac{1}{2}$
  Donc $t_3 = -\dfrac{1}{2}$

Le cinquième terme de t_n est: t_5

$t_5 = \dfrac{3}{2}t_{5-1} - 2 = \dfrac{3}{2}t_4 - 2$

Calculons t_4

$t_4 = \dfrac{3}{2}t_{4-1} - 2 = \dfrac{3}{2}t_3 - 2 = \dfrac{3}{2} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) - 2 = -\dfrac{3}{4} - 2 = -\dfrac{11}{4}$

Donc $t_5 = \dfrac{3}{2} \times \left(-\dfrac{11}{4}\right) - 2 = -\dfrac{33}{8} - 2 = -\dfrac{49}{8}$

D'où $t_5 = -\dfrac{49}{8}$

f. $\begin{cases} k_0 = 7 \\ k_{n+1} = 2(n+1) - k_n \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$

- $k_0 = 7$
- $k_1 = k_{0+1} = 2(0+1) - k_0 = 2 - 7 = -5$ donc $k_1 = -5$
- $k_2 = k_{1+1} = 2(1+1) - k_1 = 4 - (-5) = 9$ donc $k_2 = 9$

Le cinquième terme de k_n est: k_4

$k_4 = k_{3+1} = 2(3+1) - k_3$

Calculons k_3

$k_3 = k_{2+1} = 2(2+1) - k_2 = 6 - 9 = -3$

Donc $k_4 = 2(3+1) - (-3) = 8 + 3 = 11$
D'où $k_4 = 11$

Exercice 2 :

1. Calculons les cinq premiers termes des suites ci-dessous.

a. Pour tout nombre entier naturel $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$.

- $u_2 = \dfrac{2\times 2+1}{2-1} = 5$ donc $u_2 = 5$
- $u_3 = \dfrac{2\times 3+1}{3-1} = \dfrac{7}{2}$ donc $u_3 = \dfrac{7}{2}$
- $u_4 = \dfrac{2\times 4+1}{4-1} = \dfrac{9}{3} = 3$ donc $u_4 = 3$
- $u_5 = \dfrac{2\times 5+1}{5-1} = \dfrac{11}{4}$ donc $u_4 = \dfrac{11}{4}$
- $u_6 = \dfrac{2\times 6+1}{6-1} = \dfrac{13}{5}$ donc $u_4 = \dfrac{13}{5}$

b. Pour tout entier naturel n, $v_n = 0,5^n - 1$.

- $v_0 = 0.5^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ donc $v_0 = 0$
- $v_1 = 0.5^1 - 1 = 0.5 - 1 = -0.5$ donc $v_1 = -0.5$
- $v_2 = 0.5^2 - 1 = 0.25 - 1 = -0.75$ donc $v_2 = -0.75$
- $v_3 = 0.5^3 - 1 = 0.125 - 1 = -0.875$ donc $v_3 = -0.875$
- $v_4 = 0.5^4 - 1 = 0.0625 - 1 = -0.9375$ donc $v_4 = -0.9375$

c. Pour tout entier naturel n, $w_n = 2n^2 - n$.

- $w_0 = 2\times 0^2 - 0 = 0$ donc $w_0 = 0$
- $w_1 = 2\times 1^2 - 1 = 2 - 1 = 1$ donc $w_1 = 1$
- $w_2 = 2\times 2^2 - 2 = 8 - 2 = 6$ donc $w_2 = 6$
- $w_3 = 2\times 3^2 - 3 = 18 - 3 = 15$ donc $w_3 = 15$
- $w_4 = 2\times 4^2 - 4 = 32 - 4 = 28$ donc $w_4 = 28$

d. Pour tout entier naturel n, $t_n = 3 + 2\times(-1)^n$.

- $t_0 = 3 + 2 \times (-1)^0 = 3 + 2 \times 1 = 3 + 2 = 5$ donc $t_0 = 5$
- $t_1 = 3 + 2 \times (-1)^1 = 3 + 2 \times (-1) = 3 - 2 = 1$ donc $t_1 = 1$
- $t_2 = 3 + 2 \times (-1)^2 = 3 + 2 \times 1 = 3 + 2 = 5$ donc $t_2 = 5$
- $t_3 = 3 + 2 \times (-1)^3 = 3 + 2 \times (-1) = 3 - 2 = 1$ donc $t_0 = 5$
- $t_4 = 3 + 2 \times (-1)^4 = 3 + 2 \times 1 = 3 + 2 = 5$ donc $t_4 = 5$

2. Exprimons le terme d'indice $n+1$ en fonction de n pour chacune des suites précédentes.

a. Pour tout nombre entier naturel $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2(n+1)+1}{(n+1)-1} \\ u_{n+1} &= \frac{2n+3}{n} \end{aligned}$$

b. Pour tout entier naturel n, $v_n = 0,5^n - 1$.

$$v_{n+1} = 0,5^{n+1} - 1$$

c. Pour tout entier naturel n, $w_n = 2n^2 - n$.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= 2(n+1)^2 - (n+1) \\ &= (n+1)\left[2(n+1) - 1\right] \\ w_{n+1} &= (n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

d. Pour tout entier naturel n, $t_n = 3 + 2 \times (-1)^n$.

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3 + 2 \times (-1)^{n+1} \\ &= 3 + 2 \times (-1) \times (-1)^n \\ t_{n+1} &= 3 - 2 \times (-1)^n \end{aligned}$$

Exercice 3 :

On dispose de l'algorithme suivant.

1. Donnons la valeur de la variable M à la fin de l'algorithme pour :

a. $N = 0$

- $M \leftarrow 2 \times 0 + 7$ donc $M = 7$
- $M \leftarrow 7 - 2^0$ donc $M = 6$

D'où pour $N = 0$ on obtient $M = 6$

b. $N = 1$

- $M \leftarrow 2 \times 1 + 7$ donc $M = 9$
- $M \leftarrow 9 - 2^1$ donc $M = 7$

D'où pour $N = 1$ on obtient $M = 7$

c. $N = 2$

- $M \leftarrow 2 \times 2 + 7$ donc $M = 11$
- $M \leftarrow 11 - 2^2$ donc $M = 7$

D'où pour $N = 2$ on obtient $M = 7$

d. $N = 3$

- $M \leftarrow 2 \times 3 + 7$ donc $M = 13$
- $M \leftarrow 13 - 2^3$ donc $M = 5$

D'où pour $N = 3$ on obtient $M = 5$

2. Donnons une formule explicite de la suite (u_n) implémenter dans l'algorithme.
On a l'algorithme

$$M \leftarrow 2N + 7$$
$$M \leftarrow M - 2^N$$

En remplaçant l'expression de M de la première ligne dans l'expression de M de la deuxième ligne on obtient:
$M \leftarrow 2N + 7 - 2^N$
Ainsi, la suite implémenter dans l'algorithme est :
$u_n = 2n + 7 - 2^n$ pour tout entier naturel n

3. Calculons la valeur du 7^e terme.
Le 7^e terme est u_6, donc on a:
$u_6 = 2 \times 6 + 7 - 2^6 = 12 + 7 - 64 = -45$
D'où le 7^e terme de la suite a pour valeur $u_6 = -45$

Exercice 4 :
Déterminons les cinq premiers termes des suites ci-dessous.

1. $u_0 = 2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 6$

- $u_0 = 2$
- $u_1 = u_{0+1} = u_0^2 - 6 = 2^2 - 6 = 4 - 6 = -2$ donc $u_1 = -1$
- $u_2 = u_{1+1} = u_1^2 - 6 = (-2)^2 - 6 = 4 - 6 = -2$ donc $u_2 = -1$
- $u_3 = u_{2+1} = u_2^2 - 6 = (-2)^2 - 6 = 4 - 6 = -2$ donc $u_3 = -1$
- $u_4 = u_{3+1} = u_3^2 - 6 = (-2)^2 - 6 = 4 - 6 = -2$ donc $u_4 = -1$

2. $v_1 = 2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = 5v_n^2 - 3^n$

- $v_1 = 2$
- $v_2 = v_{1+1} = 5v_1^2 - 3^1 = 5 \times 2 - 3 = 7$ donc $v_2 = 7$
- $v_3 = v_{2+1} = 5v_2^2 - 3^2 = 5 \times 7 - 9 = 35 - 9 = 26$ donc $v_2 = 26$
- $v_4 = v_{3+1} = 5v_3^2 - 3^3 = 5 \times 26 - 27 = 130 - 27 = 103$ donc $v_4 = 103$
- $v_5 = v_{4+1} = 5v_4^2 - 3^4 = 5 \times 103 - 81 = 515 - 81 = 434$ donc $v_5 = 434$

3. $w_0 = -1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = (2 + w_n)(1 - w_n) + 3.$

- $w_0 = -1$
- $w_1 = w_{0+1} = (2 + w_0)(1 - w_0) + 3 = (2 - 1)(1 + 1) + 3 = 1 \times 2 + 3 = 5$ donc $w_1 = 5$
- $w_2 = w_{1+1} = (2 + w_1)(1 - w_1) + 3 = (2 + 5)(1 - 5) + 3 = 7 \times (-4) + 3 = -28 + 3 = -25$ donc $w_2 = -25$

- $w_3 = w_{2+1} = (2+w_2)(1-w_2)+3 = (2-25)(1+25)+3 = -23\times 26+3 = -598+3 = -595$ donc $w_2 = -595$
- $w_4 = w_{3+1} = (2+w_3)(1-w_3)+3 = (2-595)(1+595)+3 = -593\times 596+3 = -353428+3 = -353425$ donc $w_2 = -353425$

Exercice 5 :

Pour chaque premier terme a_0, déterminons les quatre premiers termes de la suite (a_n) définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \dfrac{2-a_n}{2+a_n}$.

1. $a_0 = 1$

- $a_0 = 1$
- $a_1 = a_{0+1} = \dfrac{2-a_0}{2+a_0} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$ donc $a_1 = \dfrac{1}{3}$
- $a_2 = a_{1+1} = \dfrac{2-a_1}{2+a_1} = \dfrac{2-\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{7}{3}} = \dfrac{5}{7}$ donc $a_2 = \dfrac{5}{7}$
- $a_3 = a_{2+1} = \dfrac{2-a_2}{2+a_2} = \dfrac{2-\frac{5}{7}}{2+\frac{5}{7}} = \dfrac{\frac{9}{7}}{\frac{19}{7}} = \dfrac{9}{19}$ donc $a_3 = \dfrac{9}{19}$

2. $a_0 = 2$

- $a_0 = 2$
- $a_1 = a_{0+1} = \dfrac{2-a_0}{2+a_0} = \dfrac{2-2}{2+2} = 0$ donc $a_1 = 0$
- $a_2 = a_{1+1} = \dfrac{2-a_1}{2+a_1} = \dfrac{2-0}{2+0} = 1$ donc $a_2 = 1$
- $a_3 = a_{2+1} = \dfrac{2-a_2}{2+a_2} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$ donc $a_3 = \dfrac{1}{3}$

3. $a_0 = -3$

- $a_0 = -3$
- $a_1 = a_{0+1} = \dfrac{2-a_0}{2+a_0} = \dfrac{2+3}{2-3} = -5$ donc $a_1 = -5$
- $a_2 = a_{1+1} = \dfrac{2-a_1}{2+a_1} = \dfrac{2+5}{2-5} = -\dfrac{7}{3}$ donc $a_2 = -\dfrac{7}{3}$
- $a_3 = a_{2+1} = \dfrac{2-a_2}{2+a_2} = \dfrac{2+\dfrac{7}{3}}{2-\dfrac{7}{3}} = \dfrac{\dfrac{13}{3}}{-\dfrac{1}{3}} = -13$ donc $a_3 = -13$

4. $a_0 = 0,5$

- $a_0 = 0,5$
- $a_1 = a_{0+1} = \dfrac{2-a_0}{2+a_0} = \dfrac{2-0.5}{2+0.5} = \dfrac{1.5}{2.5} = \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5}$ donc $a_1 = \dfrac{3}{5}$
- $a_2 = a_{1+1} = \dfrac{2-a_1}{2+a_1} = \dfrac{2-\dfrac{3}{5}}{2+\dfrac{3}{5}} = \dfrac{\dfrac{7}{5}}{\dfrac{13}{5}} = \dfrac{7}{13}$ donc $a_2 = \dfrac{7}{13}$.
- $a_3 = a_{2+1} = \dfrac{2-a_2}{2+a_2} = \dfrac{2-\dfrac{7}{13}}{2+\dfrac{7}{13}} = \dfrac{\dfrac{19}{13}}{\dfrac{33}{13}} = \dfrac{19}{33}$ donc $a_3 = \dfrac{19}{33}$.

