POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

CORRECTION DES EXERCICES

ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ:

Exercice 1 :
Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en utilisant leurs forme canonique.

1. $x^2 + 4x + 5 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 5 = 0 &\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 + 1 = 0 \text{ (Absurde)} \\ &\text{car pour tout } x \in \mathbb{R}, (x+2)^2 + 1 > 0 \end{aligned}$$

Par conséquent cette équation n'admet pas de solutions réelles.

2. $-x^2 + x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} -x^2 + x + 2 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-x^2+x+2=0 &\Leftrightarrow \left[\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}\right]\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\right]=0\\
&\Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0\\
&\Leftrightarrow x-2=0 \text{ ou } x+1=0\\
&\Leftrightarrow x=2 \text{ ou } x=-1
\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont 2 et -1

3. $-3x^2-2x+1=0$

$$\begin{aligned}
-3x^2-2x+1=0 &\Leftrightarrow -3\left(x^2+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=0\\
&\Leftrightarrow -3\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\right]=0\\
&\Leftrightarrow -3\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\right]=0\\
&\Leftrightarrow -3\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\right]=0\\
&\Leftrightarrow -3\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]=0\\
&\Leftrightarrow -3\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}\right]\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}\right]=0\\
&\Leftrightarrow -3\left(x-\frac{1}{3}\right)\ (x+1)=0\\
&\Leftrightarrow x-\frac{1}{3}=0 \text{ ou } x+1=0\\
&\Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \text{ ou } x=-1
\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont $\frac{1}{3}$ et -1

©Cours Galilée *Toute reproduction, même partielle, est strictement interdite.*

4. $-2x^2+3x-1=0$

$$\begin{aligned}
-2x^2+3x-1=0 &\Leftrightarrow -2\left(x^2-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=0\\
&\Leftrightarrow -2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{1}{2}\right]=0\\
&\Leftrightarrow -2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]=0\\
&\Leftrightarrow -2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{4}\right]\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4}\right]=0\\
&\Leftrightarrow -2\left(x-1\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0\\
&\Leftrightarrow x-1=0 \text{ ou } x-\frac{1}{2}=0\\
&\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont 1 et $\frac{1}{2}$

5. $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

$$\begin{aligned}
2x^2-2\sqrt{2}x+1=0 &\Leftrightarrow 2\left(x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2}\right)=0\\
&\Leftrightarrow 2\left[\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\right]=0\\
&\Leftrightarrow 2\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=0\\
&\Leftrightarrow x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0\\
&\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

©Cours Galilée *Toute reproduction, même partielle, est strictement interdite.*

Ainsi, l'équation admet une unique solution réelle qui est : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6. $x^2 + 4x = -2$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x = -2 &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow x + 2 = \sqrt{2} \text{ ou } x + 2 = -\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow x = -2 + \sqrt{2} \text{ ou } x = -2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont : $-2 + \sqrt{2}$ et $-2 - \sqrt{2}$

Exercice 2 :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes sans utiliser le discriminant.

1. $-7x^2 + 14 = 0$

$$\begin{aligned} -7x^2 + 14 = 0 &\Leftrightarrow -7(x^2 - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$

2. $x^2 - 4x = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 4x = 0 &\Leftrightarrow x(x-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont 0 et 4

©Cours Galilée *Toute reproduction, même partielle, est strictement interdite.*

3. $(x-3)^2-(x-2)(x-3)=0$

$$\begin{aligned}(x-3)^2-(x-2)(x-3)=0 &\Leftrightarrow (x-3)\left[(x-3)-(x-2)\right]=0\\ &\Leftrightarrow (x-3)(x-3-x+2)=0\\ &\Leftrightarrow -(x-3)=0\\ &\Leftrightarrow x-3=0\\ &\Leftrightarrow x=3\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation admet une unique solution qui est 3

4. $3x^2-12+2(x-2)=0$

$$\begin{aligned}3x^2-12+2(x-2)=0 &\Leftrightarrow 3(x^2-4)+2(x-2)=0\\ &\Leftrightarrow 3(x-2)(x+2)+2(x-2)=0\\ &\Leftrightarrow (x-2)[3(x+2)+2]=0\\ &\Leftrightarrow (x-2)(3x+8)=0\\ &\Leftrightarrow x-2=0 \text{ ou } 3x+8=0\\ &\Leftrightarrow x=2 \text{ ou } x=-\frac{8}{3}\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont : 2 et $-\dfrac{8}{3}$

5. $(x+3)^2-(5x-2)^2=0$

$$\begin{aligned}(x+3)^2-(5x-2)^2=0 &\Leftrightarrow [(x+3)-(5x-2)]\times\\ &\qquad [(x+3)+(5x-2)]=0\\ &\Leftrightarrow (x+3-5x+2)(x+3+5x-2)=0\\ &\Leftrightarrow (5-4x)(6x+1)=0\\ &\Leftrightarrow 5-4x=0 \text{ ou } 6x+1=0\\ &\Leftrightarrow x=\frac{5}{4} \text{ ou } x=-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont : $\dfrac{5}{4}$ et $-\dfrac{1}{6}$

©Cours Galilée *Toute reproduction, même partielle, est strictement interdite.*

6. $(2\sqrt{2}x+3)(\sqrt{2}x-4)=-12$

$$\begin{aligned}(2\sqrt{2}x+3)(\sqrt{2}x-4)=-12 &\Leftrightarrow 4x^2-8\sqrt{2}x+3\sqrt{2}x-12=-12\\ &\Leftrightarrow 4x^2-5\sqrt{2}x=0\\ &\Leftrightarrow x(4x-5\sqrt{2})=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 4x-5\sqrt{2}=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\frac{5\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont 0 et $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

7. $9x^2-4=(3x-2)(x-5)$

$$\begin{aligned}9x^2-4=(3x-2)(x-5) &\Leftrightarrow (3x)^2-2^2-(3x-2)(x-5)=0\\ &\Leftrightarrow (3x-2)(3x+2)-(3x-2)(x-5)=0\\ &\Leftrightarrow (3x-2)[(3x+2)-(x-5)]=0\\ &\Leftrightarrow (3x-2)(3x+2-x+5)=0\\ &\Leftrightarrow (3x-2)(2x+7)=0\\ &\Leftrightarrow 3x-2=0 \text{ ou } 2x+7=0\\ &\Leftrightarrow x=\frac{2}{3} \text{ ou } x=-\frac{7}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont $\frac{2}{3}$ et $-\frac{7}{2}$

8. $49-16(x-3)^2=0$

$$\begin{aligned}49-16(x-3)^2=0 &\Leftrightarrow 7^2-[4(x-3)]^2=0\\ &\Leftrightarrow [7-4(x-3)][7+4(x-3)]=0\\ &\Leftrightarrow (7-4x+12)(7+4x-12)=0\\ &\Leftrightarrow (19-4x)(4x-5)=0\\ &\Leftrightarrow 19-4x=0 \text{ ou } 4x-5=0\\ &\Leftrightarrow x=\frac{19}{4} \text{ ou } x=\frac{5}{4}\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont $\dfrac{19}{4}$ et $\dfrac{5}{4}$

Exercice 3 :

Résolvons les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ en utilisant la méthode la plus pertinente.

1. $-5x^2 + 3x - 2 = 0$

Soit Δ le discriminant de cette équation.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 3^2 - 4(-5)(-2)\\ &= 9 - 40\\ &= -31\end{aligned}$$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solutions réelles.

2. $3x^2 + 9x = 0$

$$\begin{aligned}3x^2 + 9x = 0 &\Leftrightarrow 3x(x+3) = 0\\ &\Leftrightarrow 3x = 0 \text{ ou } x + 3 = 0\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -3\end{aligned}$$

Par conséquent, les solutions de l'équation sont 0 et -3

3. $4x^2 + 12x + 9 = 0$

Soit Δ le discriminant de cette équation.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 12^2 - 4(4)(9)\\ &= 144 - 144\\ &= 0\end{aligned}$$

$\Delta = 0$ donc l'équation admet une unique solution réelle:

$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{12}{2 \times 4} = -\dfrac{3}{2}$

Par conséquent, $-\dfrac{3}{2}$ est l'unique solution de l'équation.

4. $x^2 - 9x + 20 = 0$ Soit Δ le discriminant de cette équation.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-9)^2 - 4(1)(20) \\ &= 81 - 80 \\ &= 1\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes:
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9-1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9+1}{2}$
Ainsi, $x_1 = 4$ et $x_2 = 5$
Par conséquent, les solutions de l'équation sont 4 et 5

Exercice 4 :
On considère les nombres réels $a = 3 - \sqrt{5}$ et $b = 3 + \sqrt{5}$

1. Calculons $a + b$ et $a \times b$.
$a + b = 6$

$$\begin{aligned}a \times b &= (3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) \\ &= 9 + 3\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 5 \\ &= 14\end{aligned}$$

2. Déduisons les racines de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:
$f(x) = x^2 - 6x + 4$
Soit Δ le discriminant de l'équation $x^2 - 6x + 4 = 0$
$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(4) = 36 - 16 = 20$
Alors $\Delta > 0$ donc la fonction f admet deux racines x_1 et x_2 telles que:
$x_1 + x_2 = 6$ et $x_1 \times x_2 = 4$.
On déduit ainsi de la question précédente que:
$x_1 = 3 - \sqrt{5}$ et $x_2 = 3 + \sqrt{5}$ sont les racines de la fonction f.

©Cours Galilée Toute reproduction, même partielle, est strictement interdite.