SUITES NUMÉRIQUES (II)

CORRECTION DES EXERCICES

SUITES GÉOMÉTRIQUES

Exercice 1 :

Indiquons en justifiant si chacune des suites ci-dessous sont géométriques
Dans l'affirmative, précisons sa raison.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^{n+2}$.
$u_n = 3^{n+2} = 3^n \times 3^2 = 9 \times 3^n$
Ainsi, la suite (u_n) est écrite sous la forme :
$u_n = u_0 \times q^n$
D'où la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$

2. $v_0 = 4$ et,$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$.
La suite (v_n) est écrite sous la forme : $v_{n+1} = q \times v_n$ donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$

3. $w_1 = 3$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_{n+1} = \frac{2}{n} \times w_n$.
La suite (w_n) n'est pas une suite géométrique car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2}{n}$ n'est pas constant car dépendant de n.

4. $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \dfrac{7}{4^{n+1}}$.

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{7}{4^{n+1}} \\ &= \frac{7}{4^n \times 4} \\ &= \frac{7}{4} \times \frac{1}{4^n} \\ t_n &= \frac{7}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

La suite (t_n) est écrite sous la forme $t_n = t_0 \times q^n$ donc la suite (t_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$

Exercice 2 :

Indiquons en justifiant si chacune des suites ci-dessous sont géométriques
Dans l'affirmative, précisons sa raison et son premier terme.

1. $a_n = 4(-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
La suite a_n est écrite sous la forme $a_n = a_0 \times q^n$ donc la suite (a_n) est une suite géométrique de raison -1 et de premier terme $a_0 = 4$

2. $b_n = 143n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
On a : $b_0 = 0$ et $b_1 = 143$ or il n'existe aucun réel q pour lequel $b_1 = q \times b_0$ donc la suite (b_n) n'est pas une suite géométrique.

3. $c_n = 7 \times 2^{2n}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
On a $c_n = 7 \times 2^{2n} = 7 \times (2^2)^n = 7 \times 4^n$
Ainsi la suite c_n est écrite sous la forme $c_n = c_0 \times q^n$ donc elle est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme 7

4. $d_n = 3 \times 5^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
On a : $d_n = 3 \times 5^{-n} = 3 \times \dfrac{1}{5^n} = 3 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

Ainsi, la suite (d_n) est écrite sous la forme $d_n = d_0 \times q^n$.
Par conséquent, la suite (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme 3.

Exercice 3 :

Donnons le terme général des suites géométriques définies sur $\mathbb{N}$ ci-dessous dont on connaît la raison et le premier terme.

1. $q = 1,3$ et $u_0 = -2$.
Soit u_n cette suite.
u_n étant une suite géométrique alors elle peut s'écrire
$u_n = u_0 \times q^n$ donc on obtient:
$u_n = -2 \times (1,3)^n$.

2. $q = 5$ et $v_0 = 25$. Soit v_n cette suite.
v_n étant une suite géométrique alors elle peut s'écrire
$v_n = v_0 \times q^n$ donc on obtient:
$v_n = 25 \times (5)^n$.

3. $q = -2$ et $w_0 = 10$. Soit w_n cette suite.
w_n étant une suite géométrique alors elle peut s'écrire
$w_n = w_0 \times q^n$ donc on obtient:
$w_n = 10 \times (-2)^n$

Exercice 4 :

1. Déterminons la valeur du terme u_5 de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 10$ et raison $0,1$.

u_n étant une suite géométrique alors elle peut s'écrire
$u_n = u_0 \times q^n$ donc on obtient:
$u_n = 10 \times (0,1)^n$
Ainsi, $u_5 = 10 \times (0,1)^5 = 10 \times 0,00001 = 0,0001$.
Donc $u_5 = 0,0001$.

2. Déterminons la valeur du terme v_{16} de la suite géométrique (v_n) définie par $v_0 = 1$ et tout entier naturel n, $v_{n+1} = -2v_n$.

$v_{n+1} = -2v_n$ donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison -2 donc $v_n = 1 \times (-2)^n$ d'où $v_n = (-2)^n$
Ainsi, $v_{16} = (-2)^16 = 65536$
D'où $v_{16} = 65536$.

Exercice 5 :

On considère une suite géométrique (u_n) de raison $q = -2$ et de premier terme $u_0 = 6$.

1. Calculons u_1, u_2 et u_3.

- $u_1 = q \times u_0 = -2 \times 6 = -12$
- $u_2 = q \times u_1 = -2 \times (-12) = 24$
- $u_3 = q \times u_2 = -2 \times 24 = -48$

2. Déterminons l'expression de u_n en fonction de n, pour tout nombre entier naturel n.
(u_n) est une suite géométrique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 6$ donc on obtient :
$u_n = 6 \times (-2)^n$

3. Calculons u_7 et u_{12}.
De ce qui précède on a: $u_n = 6 \times (-2)^n$ alors

- $u_7 = 6 \times (-2)^7 = 6 \times (-128) = -768$ donc $u_7 = -768$
- $u_{12} = 6 \times (-2)^{12} = 6 \times 4096 = 24576$ donc $u_{12} = 24576$

Exercice 6 :

Étudions le sens de variation de chacune des suites géométriques définies sur $\mathbb{N}$ et dont tout les termes sont strictement positives ci-dessous.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 6^{n+2}$
On a : $u_n = 6^{n+2} = 6^n \times 6^2 = 36 \times 6^n$
Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison 6 or $6 > 1$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{5^{n+1}}{3^{2n}}$

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{5^{n+1}}{3^{2n}} \\ &= \frac{5^n \times 5}{(3^2)^n} \\ &= \frac{5 \times 5^n}{9^n} \\ v_n &= 5 \times \left(\frac{5}{9}\right)^n \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{9}$ or $\frac{5}{9} < 1$ donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

3. $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 2,5^n$
La suite (w_n) est une suite géométrique de raison $2,5$ et $2,5 > 1$ donc la suite (w_n) est strictement croissante.

4. $t_0 = 2$ et pour tout $n > 0$, $t_{n+1} = -\frac{3}{7}t_n$
La suite (t_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{7}$ or $-\frac{3}{7} < 0$ donc la suite (t_n) n'est ni croissante ni décroissante.