DÉRIVATION LOCALE

CORRECTION DES EXERCICES

NOMBRE DÉRIVÉ ET TANGENTE

Exercice 1 :

Citons parmi les droites, celles qui semblent être des tangentes à la courbe et précisons le cas échéant en quel point:

- La droite T_2 est tangent à la courbe au point b'abscisse -1.
- La droite T_3 est tangent à la courbe au point b'abscisse 1.
- La droite T_4 est tangent à la courbe au point b'abscisse 0.
- La droite T_5 est tangent à la courbe au point b'abscisse -1.36.

Exercice 2 :

1. Déterminons par lecture graphique, l'équation de la tangente $\mathcal{T}$:
Par lecture graphique, on remarque que la tangente a pour coefficient directeur -2 et passe par le point de coordonnées $(0, 2)$, ainsi, la tangente a pour équation $y = -2x + 2$.

2. Déduisons $f'(1)$.
De ce qui précède, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est -2 donc $f'(1) = -2$.

3. Déterminons par lecture graphique, les valeurs de x_0 pour lesquelles $f'(x_0) = 0$.

Les valeurs de x_0 pour lesquelles $f'(x_0) = 0$ sont les valeurs des abscisses des points de la courbe en lesquelles la courbe admet une tangente horizontale.
Ainsi, les points en lesquels la courbe admet des tangentes horizontales sont: le point d'abscisse 0 et le point d'abscisse -1.
Par conséquent, $f'(0) = 0$ et $f'(-1) = 0$.

Exercice 3 :

1. Déterminons par lecture graphique, $f'(-1)$.
$f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1.
La tangente à la courbe au point d'abscisse -1 passe par les points de coordonnées $(-1, 2)$ et $(2, -2)$
Le coefficient directeur de la tangente est donc $\dfrac{-2-2}{2-(-1)} = -\dfrac{4}{3}$
(Il est facile de lire le coefficient directeur de la tangente directement sur le graphique.)
D'où $f'(-1) = -\dfrac{4}{3}$

2. Déduisons l'équation de la tangente $\mathcal{T}$.
$T : y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$
De ce qui précède $f'(-1) = -\dfrac{4}{3}$ et par lecture graphique on a $f(-1) = 2$ donc on a:
$T : y = -\dfrac{4}{3}(x+1) + 2 \Leftrightarrow T : y = -\dfrac{4}{3}x - \dfrac{4}{3} + 2.$
D'où $T : y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{2}{3}$

Exercice 4 :

Donnons, par lecture graphique, les valeurs des nombres:

- $g(-4) = 1$ et $g'(-4) = 5$
- $g(0) = -1$ et $g'(0) = -1$

- $g(4) = 4$ et $g'(4) = \dfrac{5}{2}$.

Exercice 5 :

1. Donnons, par lecture graphique, la valeur de $f'(1)$..
La tangente T passe par les points de coordonnées $(0, 3)$ et $(2, -1)$.
D'où par lecture graphique $f'(1) = -2$

2. Oui, la parabole $\mathcal{P}$ admet une tangente au point d'abscisse 0, car la fonction f étant une fonction polynôme, elle est définie et dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

3. Donnons l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.
L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est : $y = 2$

Exercice 6 :

1. Donnons, par lecture graphique, la valeur de $f'(-1)$ et l'équation de la tangente $\mathcal{T}$.
La tangente T à la parabole $\mathcal{P}$ au point D d'abscisse -1 est horizontale alors $f'(-1) = 0$.
L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est : $y = -3$

2. Oui, la parabole $\mathcal{P}$ admet une tangente au point d'abscisse -2, car la fonction f étant une fonction polynôme, elle est définie et dérivable en -1.

3. Déduisons une équation de la tangente au point d'abscisse -2.
Soit T_1 la tangente à la parabole au point d'abscisse -2.
$T_1 : y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2)$
Déterminons $f(-2)$ et $f'(-2)$.

- D'après le graphe, $f(-2) = -1$.

- Soit h un réel non nul.

$$\begin{aligned}
f'(-2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2(-2+h)^2+4(-2+h)-1-(-1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2(4-4h+h^2)-8+4h-1+1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{8-8h+2h^2-8+4h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2h^2-4h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2h-4 \\
f'(-2) &= -4
\end{aligned}$$

Ainsi, $T_1 : y = -4(x+2)-1 \Leftrightarrow T_1 : y = -4x-8-1$
D'où $T_1 : y = -4x-9$

Exercice 7 :

1. Donnons, par lecture graphique, les valeurs de $f'(0), f'(1)$ et $f'(-1)$.

- $f'(0) = -3$
- $f'(1) = 0$
- $f'(-1) = 0$

2. Donnons, par lecture graphique, les équations des tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses 1 et -1.

- Au point d'abscisse 1, l'équation de la tangente est: $y = -1$
- Au point d'abscisse -1, l'équation de la tangente est: $y = 3$

3. Déterminons l'équation de la tangente à la courbes $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Soit T l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.
$T : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
On a: $f'(0) = -3$ et $f(0) = 1$
D'où $T : y = -3x + 1$

Exercice 8 :

La fonction f est la fonction carré, alors $f(x) = x^2$

1. Donnons une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse $x_A = 1$.
$T_A : y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$
Donc $T_A : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$
Déterminons $f(1)$ et $f'(1)$.

- $f(1) = 1^2 = 1$ donc $f(1) = 1$
- Soit h un réel non nul.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 2 + h \\ f'(1) &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi, $T_A : y = 2(x - 1) + 1$ donc $T_A : y = 2x - 1$

2. Donnons l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = -1$ et parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 5$.
Soit $T : y = ax + b$ une tangente à $\mathcal{C}_f$ parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 5$.

T étant parallèle à la droite $y = -2x + 5$ alors elles ont le même coefficient directeur donc $a = -2$ et $T : y = -2x + b$
Déterminons b.
On a :$f(x_0) = f(-1) = (-1)^2 = 1$
Donc $1 = -2 \times x_0 + b \Leftrightarrow 1 = -2 \times (-1) + b \Leftrightarrow b = -1$
D'où $T : y = -2x - 1$

Exercice 9 :

La fonction g est la fonction cube alors $g(x) = x^3$

1. Donnons l'équation de la tangente T_B à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B d'abscisse $x_B = -3$.
$T_B : y = g'(x_B)(x - x_B) + g(x_B)$
Donc $T_B : y = g'(-3)(x + 3) + g(-3)$.
Déterminons $g(-3)$ et $g'(-3)$

- $g(-3) = (-3)^3 = -27$ donc $g(-3) = -27$
- Soit h un réel non nul.

$$\begin{aligned}
g'(-3) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(-3+h) - g(-3)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(-3+h)^3 - (-27)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(9 - 6h + h^2)(-3+h) + 27}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-27 + 9h + 18h - 6h^2 - 3h^2 + h^3 + 27}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{27h - 9h^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 27 - 9h + h^2 \\
g'(-3) &= 27
\end{aligned}$$

Ainsi, $T_B : y = 27(x + 3) - 27$ donc $T_B : y = 27x + 54$

2. Vérifions s'il existe une tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ parallèle à la droite d'équation $y = -3x + 2$.
Soit T la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ parallèle à la droite d'équation $y = -3x + 2$.
Supposons que T est tangent à la courbe $\mathcal{C}_g$ en un point d'abscisse x_0.
On a donc $T : y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$.
T étant parallèle à la droite d'équation $y = -3x + 2$ alors elles ont le même coefficient directeur donc $g'(x_0) = -3$.
La fonction g est une fonction polynôme, alors elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée: $g'(x) = 3x^2$
Ainsi, $g'(x_0) = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 = -3 \Leftrightarrow x_0^2 = -1$
Ce qui est ABSURDE car pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
Par conséquent, il n'existe aucune tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ qui soit parallèle à la droite d'équation $y = -3x + 2$

Exercice 10 :

La fonction h est la fonction inverse alors $h(x) = \dfrac{1}{x}$

1. Donnons l'équation de la tangente T_C à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point C d'abscisse $x_C = 2$.
$T_C : y = h'(x_C)(x - x_C) + h(x_C)$
Donc $T_C : y = h'(2)(x - 2) + h(2)$
Déterminons $h(2)$ et $h'(2)$

- $h(2) = \dfrac{1}{2}$
- Soit k un réel non nul

$$h'(2) = \lim_{k \to 0} \frac{h(2+k) - h(2)}{k}$$
$$= \lim_{k \to 0} \frac{\dfrac{1}{2+k} - \dfrac{1}{2}}{k}$$

$$\begin{aligned} h'(2) &= \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{2-(2+k)}{2(2+k)}}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{-k}{2k(2+k)} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{-1}{2(2+k)} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{-1}{4+2k} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ainsi, $T_C : y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

D'où $T_C : y = -\frac{1}{4}x + 1$

2. Prouvons que la droite T_C est parallèle à une autre tangente à la courbe $\mathcal{C}_h$ en un point dont on déterminera l'abscisse.

Soit T la tangente à la courbe $\mathcal{C}_h$ en un point x_0 et parallèle à la tangente T_C.

$T : y = h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0)$

T étant parallèle à la tangente $T_C : y = -\frac{1}{4}x$ alors elles ont le même coefficient directeur donc $h'(x_0) = -\frac{1}{4}$

La fonction $h(x) = \frac{1}{x}$ est une fonction rationnelle, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*, x \neq 0$, alors elle est continue et dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}^*$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$, ainsi:

$$h'(x_0) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow x_0 = -2 \text{ ou } x_0 = 2$$

Par conséquent, la tangente T_C est parallèle à une autre tangente à la courbe $\mathcal{C}_h$ en un point d'abscisse $x_0 = -2$

Déterminons une équation de cette tangente.
$T : y = h'(-2)(x+2) + h(-2)$
On a: $h(-2) = -\frac{1}{2}$ et $h'(-2) = -\frac{1}{4}$
Donc $T : y = -\frac{1}{4}(x+2) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow T : y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$
D'où $T : y = -\frac{1}{4}x - 1$