POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

CORRECTION DES EXERCICES

TABLEAU DE VARIATION

Exercice 1 :

Dressons un tableau de variations des polynômes.

1. $f_1(x) = 2x^2 + 8x + 2$
Le polynôme f_1 est sous la forme de $ax^2 + bx + c$
avec $a = 2, b = 8$ et $c = 2$
$a > 0$ donc la parabole de f_1 est tournée vers le haut.
On a: $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{8}{4} = -2$ et $f_1(-2) = 2(-2)^2 - 16 + 2 = -6$
On obtient par suite le tableau de variation ci-dessous:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f_1	$+\infty$ $\searrow$	-6	$\nearrow$ $+\infty$

2. $f_2(x) = -x^2 + 2x - 2$
Le polynôme f_2 est sous la forme de $ax^2 + bx + c$
avec $a = -1, b = 2$ et $c = -2$
$a < 0$ donc la parabole de f_2 est tournée vers le bas.
On a: $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2(-1)} = 1$ et $f_2(1) = -(1)^2 + 2 - 2 = -1$
On obtient par suite le tableau de variation ci-dessous:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
			-1		
f_2		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

3. $f_3(x) = -3(x+2)^2 + 4$
Le polynôme f_3 est sous la forme de $a(x-\alpha)^2 + \beta$
avec $a = -3, \alpha = -2$ et $\beta = 4$
$a < 0$ donc la parabole de f_3 est tournée vers le bas.
(α, β) sont les coordonnées du sommet de la parabole de f_3
On obtient par suite le tableau de variation ci-dessous:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
			4		
f_3		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

4. $f_4(x) = 2(x-3)^2 + 5$
Le polynôme f_4 est sous la forme de $a(x-\alpha)^2 + \beta$
avec $a = 2, \alpha = 3$ et $\beta = 5$
$a > 0$ donc la parabole de f_4 est tournée vers le haut.
(α, β) sont les coordonnées du sommet de la parabole de f_4
On obtient par suite le tableau de variation ci-dessous:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
	$+\infty$				$+\infty$
f_4		$\searrow$		$\nearrow$	
			5		

Exercice 2 :

1. $f_1(x) = x^2 + 3x - 4$
Le polynôme f_1 est sous la forme de $ax^2 + bx + c$

avec $a = 1, b = 3$ et $c = -4$
$a > 0$ donc la parabole de f_1 est tournée vers le haut.
On a: $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3}{2}$ et $f_1\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{2} + 2 = -\dfrac{1}{4}$
On obtient par suite le tableau de variation ci-dessous:

x	$-\infty$	$-\dfrac{3}{2}$	$+\infty$
f_1	$+\infty$ $\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$ $+\infty$

2. $f_2(x) = 3x^2 - 16x - 187$
Le polynôme f_2 est sous la forme de $ax^2 + bx + c$ avec
$a = 3, b = -16$ et $c = -187$
$a > 0$ donc la parabole de f_2 est tournée vers le haut.
On a: $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{16}{6} = \dfrac{8}{3}$ et $f_2\left(\dfrac{8}{3}\right) = 3\left(\dfrac{8}{3}\right)^2 - 16 \times \dfrac{8}{3} - 187$
Donc $f_2\left(\dfrac{8}{3}\right) = -\dfrac{623}{3}$
On obtient par suite le tableau de variation ci-dessous:

x	$-\infty$	$\dfrac{8}{3}$	$+\infty$
f_2	$+\infty$ $\searrow$	$-\dfrac{623}{3}$	$\nearrow$ $+\infty$

3. $f_3(x) = (x + 2)(2x + 7)$
$f_3(x) = (x + 2)(2x + 7) = 2(x + 2)(x + \dfrac{7}{2})$
Le polynôme f_3 est sous la forme de $a(x - x_1)(x - x_2)$ avec

$a = 2, x_1 = -2$ et $x_2 = -\dfrac{7}{2}$
$a > 0$ donc la parabole de f_3 est tournée vers le haut.
Soit $S(\alpha, \beta)$ le sommet de la parabole de f_3

On a: $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-2 - \dfrac{7}{2}}{2} = -\dfrac{11}{4}$

et $\beta = f_3\left(-\dfrac{11}{4}\right) = \left(-\dfrac{11}{4} + 2\right) \times \left(2 \times \left(-\dfrac{11}{4}\right) + 7\right)$

$\beta = -\dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{2} = -\dfrac{9}{8}$

On obtient par suite le tableau de variation ci-dessous:

x	$-\infty$	$-\frac{11}{4}$	$+\infty$
f_3	$+\infty$ $\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$ $+\infty$

4. $f_4(x) = -2(x-3)(x+7)$
Le polynôme f_4 est sous la forme de $a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $a = -2, x_1 = 3$ et $x_2 = -7$
$a < 0$ donc la parabole de f_4 est tournée vers le bas.
Soit $S(\alpha, \beta)$ le sommet de la parabole de f_4

On a: $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{3 - 7}{2} = -2$

et $\beta = f_4(-2) = -2(-2-3)(-2+7) = -2 \times -5 \times 5 = 50$

On obtient par suite le tableau de variation ci-dessous:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f_4	$-\infty$ $\nearrow$	50	$\searrow$ $-\infty$

Exercice 3 :

1. Montrons que $-3\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{16}$ est la forme canonique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-3x^2+\frac{9}{2}x-\frac{3}{2}$.

On a:

$$\begin{aligned}-3\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{16} &= -3\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right)+\frac{3}{16}\\ &= -3x^2+\frac{9}{2}x-\frac{27}{16}+\frac{3}{16}\\ &= -3x^2+\frac{9}{2}x-\frac{24}{16}\\ &= -3x^2+\frac{9}{2}x-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Déduisons le tableau de variations de f.

$f(x)=-3\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{16}$ est sous la forme de $a(x-\alpha)^2+\beta$

avec $a=-3, \alpha=\frac{3}{4}$ et $\beta=\frac{3}{16}$

$a<0$ donc la parabole de la fonction f est tournée vers le bas.

Ainsi, on obtient le tableau de variation ci-dessous:

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{16}$	$\searrow$	$-\infty$