SUITES NUMÉRIQUES (II)

CORRECTION DES EXERCICES

SUITES ARITHMÉTIQUES

Exercice 1 :

Indiquons en justifiant si chacune des suites ci-dessous sont arithmétiques et dans l'affirmative, précisons sa raison.

1. $u_0 = -3$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 25$.
La suite (u_n) est écrite sous la forme
$u_{n+1} = u_n + r$
Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 25

2. $v_1 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = v_n + \dfrac{2}{n}$.
La suite (v_n) n'est pas une suite arithmétique car :
$v_{n+1} - v_n = \dfrac{2}{n}$ et $\dfrac{2}{n}$ n'est pas constant car dépendant de l'entier n

3. $w_0 = 5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \dfrac{5w_n - 2}{5}$.
On a: $w_{n+1} = \dfrac{5w_n - 2}{5} = w_n - \dfrac{2}{5}$
$w_{n+1} = w_n - \dfrac{2}{5}$
La suite (w_n) est écrite sous la forme $w_{n+1} = w_n + r$ donc (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{2}{5}$

4. $t_0 = 4$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = -7t_n$.
La suite (t_n) n'est pas une suite arithmétique car :

$t_{n+1} - t_n = -7t_n - t_n = -8t_n$ et $-8t_n$ n'est pas constant car dépendant de l'entier n.

Exercice 2 :

Indiquons en justifiant si chacune des suites ci-dessous sont arithmétiques. Dans l'affirmative, précisons sa raison et son premier terme.

1. $u_n = (2n-3)^2$ avec $n \in \mathbb{N}$.
On a: $u_{n+1} = (2(n+1)-3)^2 = (2n-1)^2$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (2n-1)^2 - (2n-3)^2 \\ &= [(2n-1)-(2n-3)]\,[(2n-1)+(2n-3)] \\ &= (2n-1-2n+3)(2n-1+2n-3) \\ &= 2(4n-4) \\ &= 8n-8 \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n = 8n-8$ et $8n-8$ n'est pas constant car dépendant de l'entier n donc la suite (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

2. $v_n = 5,25n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
La suite (v_n) est écrite sous la forme $v_n = r \times n + v_0$ avec $r = 5,25$ et $v_0 = 0$.
Par conséquent, la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $5,25$ et de premier terme $v_0 = 0$.

3. $w_n = 5n - 2$ avec $n \in \mathbb{N}$.
La suite (w_n) est écrite sous la forme $w_n = r \times n + w_0$ avec $r = 5$ et $w_0 = -2$.
Par conséquent, la suite (w_n) est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $w_0 = -2$.

4. $t_n = 4(-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

On a: $t_{n+1} = 4(-1)^{n+1}$

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= 4(-1)^{n+1} - 4(-1)^n \\ &= 4(-1)^n \times (-1) - 4(-1)^n \\ &= -4(-1)^n - 4(-1)^n \\ &= -8(-1)^n \end{aligned}$$

$t_{n+1} - t_n = -8(-1)^n$ et $-8(-1)^n$ n'est pas constant car dépendant de l'entier n donc la suite (t_n) n'est pas une suite arithmétique.

Exercice 3 :

Indiquons en justifiant si chacune des suites ci-dessous sont arithmétiques. Dans l'affirmative, précisons sa raison et son premier terme.

1. $a_n = (n+2)^2 - n^2$ avec $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_n &= (n+2)^2 - n^2 \\ &= n^2 + 4n + 4 - n^2 \\ &= 4n + 4 \end{aligned}$$

La suite (a_n) est écrite sous la forme $a_n = r \times n + a_0$ avec $r = 4$ et $a_0 = 4$ donc la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $a_0 = 4$.

2. $b_n = \dfrac{15n+6}{5}$ avec $n \in \mathbb{N}$

On a: $b_n = \dfrac{15n+6}{5} = 3n + \dfrac{6}{5}$

La suite (b_n) est écrite sous la forme $b_n = r \times n + b_0$ avec $r = 3$ et $b_0 = \dfrac{6}{5}$ donc la suite (b_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $\dfrac{6}{5}$.

3. $c_n = \dfrac{n^2-9}{n+3}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{n^2-9}{n+3} \\ &= \frac{(n-3)(n+3)}{n+3} \\ c_n &= n-3 \end{aligned}$$

La suite (c_n) est écrite sous la forme $c_n = r \times n + c_0$ avec $r = 1$ et $c_0 = -3$ donc la suite (c_n) est donc une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $c_0 = -3$.

4. $d_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = \dfrac{3d_n - 7}{3}$

$d_{n+1} = \dfrac{3d_n - 7}{3} = d_n - \dfrac{7}{3}$ donc $d_{n+1} - d_n = -\dfrac{7}{3}$

La suite (d_n) est donc une suite arithmétique de raison $-\dfrac{7}{3}$ et de premier terme -2.

Exercice 4 :

La suite (t_n) est la suite des multiples positifs non nuls de 3. On a donc $t_0 = 1 \times 3 = 3$.

1. Justifions que (t_n) est arithmétique et donnons sa raison.

$$\begin{aligned} t_0 &= 1 \times 3 = 3 \\ t_1 &= 2 \times 3 = 6 = 3 + 3 = t_0 + 3 \\ t_2 &= 3 \times 3 = 9 = 6 + 3 = t_1 + 3 \end{aligned}$$

On en déduit que $t_{n+1} = t_n + 3$

Ainsi la suite (t_n) est une suite arithmétique de raison 3

2. Donnons la formule explicite de (t_n).

La suite (t_n) est une suite arithmétique de premier terme $t_0 = 3$

et de raison $r = 3$ donc en utilisant la formule $t_n = r \times n + t_0$ on obtient :
$t_n = 3n + 3$

3. Déterminons t_7 et t_{15}.
On a de ce qui précède $t_n = 3n + 3$ donc:

- t_7
  $t_7 = 3 \times 7 + 3 = 21 + 3 = 24$
  Donc $t_7 = 24$
- t_{15}
  $t_{15} = 3 \times 15 + 3 = 45 + 3 = 48$
  Donc $t_{15} = 48$

4. Donnons l'indice du terme égal à 333.
Soit k l'indice du terme égal à 333.
$t_k = 333 \Leftrightarrow 3 \times k + 3 = 333 \Leftrightarrow 3k = 333 - 3 \Leftrightarrow k = \dfrac{330}{3} = 110$
D'où l'indice du terme égal à 333 est 110.

Exercice 5 :

(u_n) est une suite arithmétique avec $u_4 = 8$ et $u_7 = 14$.

1. Donnons la raison de u_n et le premier terme u_0.
Soit r la raison de u_n
On sait que : $u_5 - u_4 = r$, $u_6 - u_5 = r$ et $u_7 - u_6 = r$
En faisant la somme membre à membre on obtient:

$$\begin{aligned} u_5 - u_4 + u_6 - u_5 + u_7 - u_6 &= 3r \Leftrightarrow \\ u_7 - u_4 &= 3r \Leftrightarrow \\ r &= \frac{u_7 - u_4}{3} \Leftrightarrow \\ r &= \frac{14 - 8}{3} \Leftrightarrow \\ r &= 2 \end{aligned}$$

Calculons le premier terme u_0.
(u_n) étant une suite arithmétique alors u_n peut s'écrire sous la forme $u_n = 2 \times n + u_0$ car (u_n) a pour raison $r = 2$.
On sait que $u_4 = 8$ donc on a:

$$\begin{aligned} u_4 = 2 \times 4 + u_0 = 8 &\Leftrightarrow \\ 8 + u_0 = 8 &\Leftrightarrow \\ u_0 = 0 & \end{aligned}$$

D'où le premier terme de la suite (u_n) est $u_0 = 0$

2. Calculons u_5, u_9 et u_{20}.
La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 0$ donc $u_n = 2n$ donc on a:

- $u_5 = 2 \times 5 = 10$
- $u_9 = 2 \times 9 = 18$
- $u_{20} = 2 \times 20 = 40$

3. Donnons l'entier naturel n pour lequel $u_n = 644$.
$u_n = 644 \Leftrightarrow 2n = 644 \Leftrightarrow n = \dfrac{644}{2} = 322$
Donc $u_n = 644$ pour l'entier $n = 322$

Exercice 6 :

Déterminons le sens de variation de chacune des suites arithmétique ci-dessous.

1. $u_n = \dfrac{2n^2 - 50}{n+5}$ avec $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2n^2-50}{n+5} \\ &= \frac{2(n^2-25)}{n+5} \\ &= \frac{2(n-5)(n+5)}{n+5} \\ &= 2(n-5) \\ u_n &= 2n - 10 \end{aligned}$$

$u_n = 2n - 10$ donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = -10$.
On a : $r = 2 > 0$ donc la suite (u_n) est une suite strictement croissante.

2. $v_0 = -3$ et $v_{n+1} = v_n - 2$
On a : $v_{n+1} - v_n = -2$
La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -2$.
$r = -2 < 0$ donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

3. $w_0 = -2$ et $w_{n+1} = \dfrac{7}{3} + w_n$
On a: $w_{n+1} - w_n = \dfrac{7}{3}$
La suite (w_n) est une suite arithmétique de raison $r = \dfrac{7}{3}$
$r = \dfrac{7}{3} > 0$ donc la suite (w_n) est strictement croissante.

4. $t_n = 7n - 2$ avec $n \in \mathbb{N}$
La suite (t_n) est une suite arithmétique écrite sous la forme $t_n = r \times n + t_0$ donc (t_n) a pour raison $r = 7$ et pour premier terme $t_0 = -2$.
$r = 7 > 0$ donc la suite (t_n) est strictement croissante.

Exercice 7 :

Donnons:

1. Son premier terme d_0.
$d_0 = -2$

2. Sa raison. On a : $d_0 = -2$ et $d_1 = -1,5$ et
$d_1 - d_0 = -1,5 - (-2) = 0,5$
Par conséquent, (d_n) a pour raison $r = 0,5$

3. Son sens de variation.

- Première méthode
  De ce qui précède on a $r = 0,5$.
  Comme $0,5 > 0$ alors la suite d_n est strictement croissante.
- Deuxième méthode
  A partir du graphe on conclut que la suite (d_n) est strictement croissante car le graphe de la suite est ascendant.

4. Le terme général de la suite d_n.
$d_n = r \times n + d_0 = 0,5 \times n - 2$
Donc la suite (d_n) a pour terme général : $d_n = 0,5n - 2$

5. La valeur de d_{13}.
$d_{13} = 0,5 \times 13 - 2 = 6,5 - 2 = 4,5$
D'où $d_{13} = 4,5$