FONCTION EXPONENTIELLE

CORRECTION DES EXERCICES

VARIATION DE FONCTION AVEC EXPONENTIELLE

Exercice 1 :

Considérons la fonction $f : x \mapsto 2e^x - 2x + 3$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminons la fonction dérivée de f.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (2e^x)' - (2x-3)'$
D'où $f'(x) = 2e^x - 2$

2. Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ en faisant un tableau de signe.
Posons: $f'(x) = 0$
$f'(x) = 0 \iff 2e^x - 2 = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$
Faisons un tableau de signe:
On a: $x < 0 \iff e^x < e^0 \iff e^x < 1 \iff e^x - 1 < 0 \iff 2e^x - 2 < 0$
Et $x > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x - 1 > 0 \iff 2e^x - 2 > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

3. Déduisons le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. Calculons les limites de f au borne de son domaine de définition.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (2e^x - 2x + 3) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\frac{2e^x}{x} - 2 + \frac{3}{x}) = +\infty$
  Car $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
  Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (2e^x - 2x + 3) = +\infty$
  Car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x + 3) = +\infty$
  D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $f(0) = 2e^0 - 2 \times 0 + 3 = 5$

On obtient donc le tableau de variation ci-dessous:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

4. Donnons l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
Soit (T) cette tangente.
$(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
On a: $f'(0) = 2e^0 - 2 = 0$ et $f(0) = 2e^0 - 2 \times 0 + 3 = 5$
Donc $(T) : y = 0x + 5$
D'où $(T) : y = 5$

Exercice 2 :

Considérons les fonctions

$$u : x \mapsto e^{3x-2} \text{ et } v : x \mapsto e^{-2x-5},$$

définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminons la fonction dérivée de :

- $u(x)$
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = (3x - 2)'e^{3x-2} = 3e^{3x-2}$
  D'où $u'(x) = 3e^{3x-2}$
- $v(x)$
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v'(x) = (-2x - 5)'e^{-2x-5} = -2e^{-2x-5}$
  D'où $v'(x) = -2e^{-2x-5}$

2. Étudions les signes de chacune de ces dérivées sur $\mathbb{R}$.

- Signe de $u'(x)$
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $e^{3x-2} > 0$ donc $3e^{3x-2} > 0$
  D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$; $u'(x) > 0$
- Signe de $v'(x)$
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $e^{-2x-5} > 0$ donc $-2e^{-2x-5} < 0$
  D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$; $v'(x) < 0$

3. Déduisons le tableau de variation de u et celui de v sur $\mathbb{R}$.

- Tableau de variation de u
  Déterminons les limites de u aux bornes de $\mathbb{R}$
  $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x-2} = +\infty$
  car $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x-2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$
  D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x-2} = 0$
  car $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x-2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$
  D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 0$
  On obtient donc le tableau de variation ci-dessous:

x	$-\infty$	$+\infty$
$u'(x)$	$+$	
$u(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

- Tableau de variation de v
  Déterminons les limites de v aux bornes de $\mathbb{R}$
  $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x-5} = 0$
  car $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x-5) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$
  D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 0$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} v(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x-5} = +\infty$
  car $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x-5) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$
  D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} v(x) = +\infty$

On obtient donc le tableau de variation ci-dessous:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$v'(x)$	$-$
$v(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

4. Détermine les coordonnées du point d'intersection de la courbe représentative de u et de celle v.
Soit $A(x_1, y_1)$ un point d'intersection de la courbe représentative de u et de celle de v.
L'abscisse du point A vérifie l'équation $u(x_1) = v(x_1)$

$$\begin{aligned} u(x_1) = v(x_1) &\Longleftarrow e^{3x_1-2} = e^{-2x_1-5} \\ &\Longleftrightarrow 3x_1 - 2 = -2x_1 - 5 \\ &\Longleftrightarrow 5x_1 = -3 \\ &\Longleftrightarrow x_1 = -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

En plus, on a: $y_1 = e^{3\times(-\frac{3}{5})-2} = e^{-\dfrac{19}{5}}$
D'où $A\left(-\dfrac{3}{5}, e^{-\dfrac{19}{5}}\right)$

Exercice 3 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x+5}}{x^2}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

1. Déterminons la fonction dérivée de f.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{(e^{2x+5})' \times x^2 - (x^2)' \times e^{2x+5}}{(x^2)^2}$
Donc $f'(x) = \dfrac{2x^2e^{2x+5} - 2xe^{2x+5}}{x^4}$
D'où $f'(x) = \dfrac{2x(x-1)e^{2x+5}}{x^4}$

2. Donnons le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}^*$.
De ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a:

$f'(x) = \dfrac{2x(x-1)e^{2x+5}}{x^4} = 2x(x-1) \times \dfrac{e^{2x+5}}{x^4}$
Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{e^{2x+5}}{x^4} > 0$
Ainsi $f'(x)$ a le signe de $x \mapsto 2x(x-1)$
Posons $2x(x-1) = 0$
$2x(x-1) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$
Faisons un tableau de signe:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$2x(x-1)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Ainsi, pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $f'(x) > 0$,
pour tout $x \in]0, 1[$, $f'(x) < 0$
et pour $x = 1$, $f'(1) = 0$

3. Déduisons le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.
Calculons les limites de f aux bornes du domaine $\mathbb{R}^*$:
On a: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x+5}}{x^2} = +\infty$
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
On a: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{2x+5}}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x+5} \times \dfrac{1}{x^2} = 0$
car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x+5} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$
On a : $\lim\limits_{x \to 0_>} \dfrac{e^{2x+5}}{x^2} = +\infty$
car $\lim\limits_{x \to 0_>} e^{2x+5} = e^5$ et $\lim\limits_{x \to 0_>} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$
On a: $\lim\limits_{x \to 0_>} \dfrac{e^{2x+5}}{x^2} = +\infty$
car $\lim\limits_{x \to 0_<} e^{2x+5} = e^5$ et $\lim\limits_{x \to 0_<} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$
Et on a: $f(1) = \dfrac{e^{2\times 1+5}}{1^2} = e^7$ On obtient par suite le tableau de variation ci-dessous:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	e^7	$\nearrow$	$+\infty$

4. Donnons une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1.
Soit (T) cette tangente.
$(T) : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$
On a : $f(-1) = \dfrac{e^{2\times(-1)+5}}{(-1)^2} = e^3$
et $f'(-1) = \dfrac{-2(-1-1)e^{2\times(-1)+5}}{(-1)^4} = 4e^3$
Donc $(T) : y = 4e^3(x+1) + e^3 = 4e^3x + 5e^3$
D'où $(T) : y = (4x+5)e^3$

Exercice 4 :

Déterminons la fonction dérivée et donnons le sens de variation de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I indiqué.

1. $g_1(x) = xe^{2x} - 1$ sur $I = \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,on a :
$g_1'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$
D'où $g_1'(x) = (2x+1)e^{2x}$
Étudions le signe de $g_1'(x)$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} > 0$ donc $g_1'(x)$ a le signe de $x \mapsto 2x+1$.
Posons $2x+1 = 0$
$2x+1 = 0 \iff x = -\dfrac{1}{2}$
Faisons un tableau de signe de $x \mapsto 2x+1$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$, $2x+1 < 0$ et pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $2x+1 > 0$.
Par conséquent, g_1 est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

2. $g_2(x) = x - 5 + e^x$ sur $I = \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a:
$g_2'(x) = 1 + e^x$
Étudions le signe de $g_2'(x)$
Pour tout $x \in \mathbb{R}; \quad 1 + e^x > 0$
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}; g_2'(x) > 0$
Par conséquent g_2 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

3. $g_3(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a:
$g_3'(x) = \dfrac{e^x(e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{e^x \times e^x + e^x - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2}$
D'où $g_3'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2}$
Étudions le signe de $g_3'(x)$:
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $(e^x + 1) > 0$ alors $\dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}, g_3'(x) > 0$
Par conséquent, g_3' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

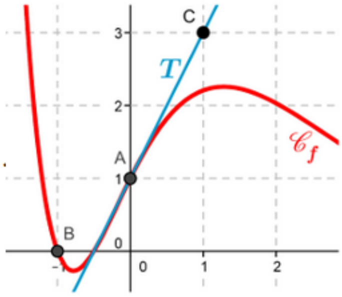
4. $g_4(x) = xe^{-3x+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a:
$g_4'(x) = e^{-3x+1} - 3xe^{-3x+1}$
D'où $g_4'(x) = (1 - 3x)e^{-3x+1}$
Étudions le signe de $g_4'(x)$
Pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{-3x+1} > 0$ donc $g_4'(x)$ a le signe de $x \mapsto 1 - 3x$
Posons $1 - 3x = 0$
$1 - 3x = 0 \iff x = \dfrac{1}{3}$
Faisons un tableau de signe.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$1-3x$		$+$	0	$-$	

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$; $g_4'(x) > 0$ et pour tout $x \in \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$; $g_4'(x) <$ 0.
Par conséquent, g_4 est strictement croissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$ et strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$

Exercice 5 :

La courbe ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$; elle passe par les points $A(0;1)$ et $B(-1;0)$. T est la tangente à $\mathcal{C}$ en A et passant par le point $C(1;3)$.



1. Déterminons graphiquement les valeurs respectives de $f(0)$ et $f'(0)$, où f' est la dérivée de la fonction f.
A partir du graphique, on obtient: $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$

2. Admettons que f est définie, pour tout x réel, par : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ où a, b et c sont des réels.

a. Déterminons la fonction dérivée f' de f.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a:
$f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x}$
D'où $f'(x) = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$

b. Déterminons la valeur de a, b et c, en justifiant.
On sait que $f(0) = 1$
$f(0) = 1 \iff (a \times 0^2 + b \times 0 + c)e^0 = 1 \iff c = 1$

D'où $c = 1$
On sait aussi que $f'(0) = 2$
$f'(0) = 2 \iff [a \times 0^2 + (2a - b) \times 0 + b - c]e^0 = 2 \iff b - c = 2$
$b - c = 2 \iff b = 2 + c \iff b = 3$
D'où $b = 3$
Enfin, on sait aussi que la courbe passe par le point $B(-1, 0)$ donc $f(-1) = 0$
$f(-1) = 0 \iff (a(-1)^2 - b + c)e^1 = 0 \iff a - b + c = 0$ car $e > 0$
$a - b + c = 0 \iff a = b - c \iff a = 2$
De tout ce qui précède, on conclut que : $f(x) = (2x^2 + 3x + 1)e^x$

Exercice 6 :

1. Donnons une expression de la tangente à la courbe représentative de u au point d'abscisse 0.
Soit (T) cette tangente.
$(T) : y = u'(0)(x - 0) + u(0)$
On a $u(0) = 2e^{\frac{0}{2}} - 4 = -2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = e^{\frac{x}{2}}$ donc $u'(0) = e^0 = 1$
Ainsi, $(T) : y = 1(x - 0) - 2$
D'où $(T) : y = x - 2$

2. Donnons une expression de la dérivé de v, puis dressons le tableau de variation de v sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a :
$v'(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1$. Étudions le signe de $v'(x)$
Posons $v'(x) = 0$
$v'(x) = 0 \iff e^{\frac{x}{2}} - 1 = 0 \iff e^{\frac{x}{2}} = 1 \iff \frac{x}{2} = 0 \iff x = 0$
Faisons un tableau de signe et de variation:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$v'(x)$		$-$	0	$+$	
$v(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Déduisons la position relative de la courbe représentative de u par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

$u(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 4$ et $(T) : y = x - 2$

Étudions le signe de $u(x) - y$

On a : $u(x) - y = 2e^{\frac{x}{2}} - 4 - x + 2 = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2$

Donc $u(x) - y = v(x)$ Ainsi, à partir du tableau de variation de la question précédente, on conclut que:

pour tout $x \in]-\infty, 0[$, la courbe représentative de la fonction u est au dessus de la tangente (T) et pour tout $x \in [0, +\infty[$ la courbe représentative de u est au dessus de la tangente (T)

