FONCTION EXPONENTIELLE

CORRECTION DES EXERCICES

ÉQUATIONS AVEC LA FONCTION EXPONENTIELLE

Exercice 1 :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1. $e^{2x-5} = e$
$e^{2x-5} = e \iff 2x - 5 = 1 \iff x = 3$
Soit S_1 l'ensemble solution de cette équation: $S_1 = \{3\}$

2. $3 + e^{2x} = 1$
$3 + e^{2x} = 1 \iff e^{2x} = -2($ Absurde $)$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} > 0$.
Soit S_2 l'ensemble solution de cette équation: $S_2 = \{\ \}$

3. $e^{-x^2+2x} = 1$
$e^{-x^2+2x} = 1 \iff e^{-x^2+2x} = e^0 \iff -x^2 + 2x = 0 \iff x(-x+2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$
Soit S_3 l'ensemble solution de cette équation: $S_3 = \{0, 2\}$

4. $e^{\frac{-x^2}{2}} = \frac{1}{e}$
$e^{\frac{-x^2}{2}} = \frac{1}{e} \iff e^{\frac{-x^2}{2}} = e^{-1} \iff -\frac{x^2}{2} = -1 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$
Soit S_4 l'ensemble solution de cette équation: $S_4 = \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$

Exercice 2 :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations.

1. $e^{3x+2} = e^{15x-1}$
$e^{3x+2} = e^{15x-1} \iff 3x+2 = 15x-1 \iff 12x = 3 \iff x = \dfrac{1}{4}$ Soit S_1 l'ensemble solution de cette équation: $S_1 = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$

2. $e^{-x^2} = \dfrac{1}{e^9}$ $e^{-x^2} = \dfrac{1}{e^9} \iff e^{-x^2} = e^{-9} \iff -x^2 = -9 \iff x = 3$ ou $x = -3$
Soit S_2 l'ensemble solution de cette équation: $S_2 = \{-3, 3\}$

3. $e^{3x^2} = e^{12}$
$e^{3x^2} = e^{12} \iff 3x^2 = 12 \iff x^2 = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$ Soit S_3 l'ensemble solution de cette équation: $S_3 = \{-2, 2\}$

4. $e^{-2x} \times e^{3x-2} = e^{4x-5}$
$e^{-2x} \times e^{3x-2} = e^{4x-5} \iff e^{-2x+3x-2} = e^{4x-5} \iff x - 2 = 4x - 5 \iff 3x = 3 \iff x = 1$
Soit S_4 l'ensemble solution de cette équation: $S_4 = \{1\}$

5. $e^{2x^2-12x-9} = 1$
$e^{2x^2-12x-9} = 1 \iff e^{2x^2-12x-9} = e^0 \iff 2x^2 - 12x - 9 = 0 \iff (2x-3)^2 = 0 \iff 2x - 3 = 0 \iff x = \dfrac{3}{2}$
Soit S_5 l'ensemble solution de cette équation: $S_5 = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

6. $\dfrac{e^{4x+2}}{e^{3x+1}} = e$
$\dfrac{e^{4x+2}}{e^{3x+1}} = e \iff e^{4x+2-3x-1} = e \iff e^{x+1} = e \iff x + 1 = 1 \iff x = 0$
Soit S_6 l'ensemble solution de cette équation: $S_6 = \{0\}$

Exercice 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $e^{2x-1} > 1$

$$\begin{aligned} e^{2x-1} > 1 &\Longleftrightarrow e^{2x-1} > e^0 \\ &\Longleftrightarrow 2x - 1 > 0 \\ &\text{car la fonction } x \mapsto e^x \text{ est croissante.} \\ &\Longleftrightarrow x > \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\end{aligned}$$

Soit S_1 l'ensemble solution de l'inéquation:

$$S_1 = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

2. $e^{-2x+3} \geq 1$

$$\begin{aligned} e^{-2x+3} \geq 1 &\Longleftrightarrow e^{-2x+3} \geq e^0 \\ &\Longleftrightarrow -2x + 3 \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow 3 \geq 2x \\ &\Longleftrightarrow x \leq \frac{3}{2} \\ &\Longleftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right] \end{aligned}$$

Soit S_2 l'ensemble solution de l'inéquation:

$$S_2 = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$$

3. $e^{3-2x} < e$

$$\begin{aligned} e^{3-2x} < e &\Longleftrightarrow 3 - 2x < 1 \\ &\Longleftrightarrow 2 < 2x \\ &\Longleftrightarrow x > 1 \\ &\Longleftrightarrow x \in]1, +\infty[\end{aligned}$$

Soit S_3 l'ensemble solution de l'inéquation:

$$S_3 =]1, +\infty[$$

4. $e^{-2x-5} \leq e$

$$\begin{aligned} e^{-2x-5} \leq e &\iff -2x-5 \leq 1 \\ &\iff -2x \leq 6 \\ &\iff x \geq -3 \\ &\iff x \in [-3, +\infty[\end{aligned}$$

Soit S_4 l'ensemble solution de l'inéquation:

$$S_4 = [-3, +\infty[$$

5. $e^{-x^2+x+6} \leq 1$

$$\begin{aligned} e^{-x^2+x+6} \leq 1 &\iff e^{-x^2+x+6} \leq e^0 \\ &\iff -x^2+x+6 \leq 0 \end{aligned}$$

Posons: $-x^2+x+6=0$
Soit Δ le discriminant de cette équation.
$\Delta = 1^2 - 4(-1)(6) = 25 = 5^2 > 0$ $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
$x_1 = \dfrac{-1-5}{-2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-1+5}{-2} = -2$
Faisons un tableau de signe

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$-x^2+x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi pour tout $x \in]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[$, $-x^2+x+6 \leq 0$
Soit Soit S_5 l'ensemble solution de l'inéquation:

$$S_5 =]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[$$

6. $e^{4x+2} \geq \dfrac{1}{e^{2x}}$

$$\begin{aligned} e^{4x+2} \geq \frac{1}{e^{2x}} &\Longleftrightarrow e^{4x+2} \geq e^{-2x} \\ &\Longleftrightarrow 4x+2 \geq -2x \\ &\Longleftrightarrow 6x \geq -2 \\ &\Longleftrightarrow x \geq -\frac{1}{3} \\ &\Longleftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[\end{aligned}$$

Soit Soit S_6 l'ensemble solution de l'inéquation:

$$S_6 = \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$$

Exercice 4 :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $e^{2x^2+3x-2} \geq 1$

$$\begin{aligned} e^{2x^2+3x-2} \geq 1 &\Longleftrightarrow e^{2x^2+3x-2} \geq e^0 \\ &\Longleftrightarrow 2x^2+3x-2 \geq 0 \end{aligned}$$

Posons $2x^2+3x-2=0$
Soit Δ le discriminant de cette équation.
$\Delta = 3^2 - 4(2)(-2) = 25 = 5^2$
$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes:
$x_1 = \dfrac{-3-5}{4} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{1}{2}$
Faisons un tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x^2+3x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\infty, -2\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, on a: $2x^2 + 3x - 2 \geq 0$
D'où l'ensemble solution de l'inéquation est :

$$S_1 = \left]-\infty, -2\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

2. $e^{x^2-2x+2} > e$

$$\begin{aligned} e^{x^2-2x+2} > e &\iff x^2 - 2x + 2 > 1 \\ &\iff x^2 - 2x + 1 > 0 \end{aligned}$$

Posons $x^2 - 2x + 1 = 0$
Soit Δ le discriminant de cette équation.
$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$
$\Delta = 0$ donc l'équation admet une unique solution réelle:
$x_0 = \dfrac{2}{2} = 1$
Faisons un tableau de signe:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x^2 - 2x + 1$		$+$	0	$+$	

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\infty, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$, on a: $x^2 - 2x + 1 > 0$ D'où l'ensemble solution de l'inéquation est :

$$S_2 = \left]-\infty, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$$

3. $e^{x^2+2x+16} \leq e^5 (e^2)^5$

$$\begin{aligned} e^{x^2+2x+16} \leq e^5 (e^2)^5 &\iff e^{x^2+2x+16} \leq e^5 \times e^10 \\ &\iff e^{x^2+2x+16} \leq e^15 \\ &\iff x^2 + 2x + 16 \leq 15 \\ &\iff x^2 + 2x + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

Posons $x^2 + 2x + 1 = 0$
Soit Δ le discriminant de cette équation.

$\Delta = 2^2 - 4(1)(1) = 0$
$\Delta = 0$ donc l'équation admet une unique solution réelle: $x_0 = \dfrac{-2}{2} = -1$
Faisons un tableau de signe.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x^2 + 2x + 1$		$+$	0	$+$	

Ainsi, pour $x = -1$ on a $x^2 + 2x + 1 \leq 0$
D'où l'ensemble solution de l'inéquation est :

$$S_3 = \{-1\}$$

4. $\dfrac{e^{x^2}}{(e^x)^2(e^3)^3} \leq \dfrac{1}{e}$

$$\begin{aligned}
\frac{e^{x^2}}{(e^x)^2(e^3)^3} \leq \frac{1}{e} &\Longleftrightarrow \frac{e^{x^2}}{e^{2x}e^9} \leq \frac{1}{e} \\
&\Longleftrightarrow \frac{e^{x^2}}{e^{2x+9}} \leq e^{-1} \\
&\Longleftrightarrow e^{x^2-2x-9} \leq e^{-1} \\
&\Longleftrightarrow x^2 - 2x - 9 \leq -1 \\
&\Longleftrightarrow x^2 - 2x - 8 \leq 0
\end{aligned}$$

Posons $x^2 - 2x - 8 = 0$
Soit Δ le discriminant de cette équation
$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-8) = 4 + 32 = 36 = 6^2$
$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes: $x_1 = \dfrac{2-6}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{2+6}{2} = 4$
Faisons un tableau de signe.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x^2 - 2x - 8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, pour tout $x \in [-2, 4]$ on a: $x^2 - 2x - 8 \leq 0$
D'où l'ensemble solution de l'inéquation est :

$$S_4 = [-2, 4]$$

Exercice 5 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $e^{2x}(e^x - 1) = 0$

$$\begin{aligned} e^{2x}(e^x - 1) = 0 &\Longleftrightarrow e^x - 1 = 0 \text{ car } \forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x > 0 \\ &\Longleftrightarrow e^x = 1 \\ &\Longleftarrow x = 0 \end{aligned}$$

Soit S_1 l'ensemble solution de cette équation:

$$S_1 = \{0\}$$

2. $e^{e^{2x}} - e = 0$

$$\begin{aligned} e^{e^{2x}} - e = 0 &\Longleftrightarrow e^{e^{2x}} = e \\ &\Longleftrightarrow e^{2x} = 1 \\ &\Longleftrightarrow 2x = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Soit S_2 l'ensemble solution de cette équation:

$$S_2 = \{0\}$$

3. $(e^x + 2)(e^{2x} - e^2) = 0$

$$\begin{aligned} (e^x + 2)(e^{2x} - e^2) = 0 &\Longleftrightarrow e^{2x} - e^2 = 0 \text{ car } \forall\, x \in \mathbb{R}, e^x + 2 > 0 \\ &\Longleftrightarrow e^{2x} = e^2 \\ &\Longleftrightarrow 2x = 2 \\ &\Longleftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Soit S_3 l'ensemble solution de cette équation:

$$S_3 = \{1\}$$

4. $e^{\left(\frac{-3x-2}{x^2+1}\right)} - e^2 = 0$

$$\begin{aligned} e^{\left(\frac{-3x-2}{x^2+1}\right)} - e^2 = 0 &\Longleftrightarrow e^{\left(\frac{-3x-2}{x^2+1}\right)} = e^2 \\ &\Longleftrightarrow \frac{-3x-2}{x^2+1} = 2 \\ &\Longleftrightarrow -3x-2 = 2x^2+2 \\ &\Longleftrightarrow 2x^2+3x+4 = 0 \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de cette équation:
$\Delta = 3^2 - 4(2)(4) = 9 - 16 = -7$
$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution réelle. Soit S_4 l'ensemble solution de cette équation:

$$S_4 = \{\ \}$$

Exercice 6 :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $e^{2-x} \times e^{-3x} - 1 = 0$

$$\begin{aligned} e^{2-x} \times e^{-3x} - 1 = 0 &\Longleftrightarrow e^{2-x-3x} = 1 \\ &\Longleftrightarrow e^{2-4x} = e^0 \\ &\Longleftrightarrow 2-4x = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Soit S_1 l'ensemble solution de cette équation:

$$S_1 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

2. $\left(e^{e^{3x}}\right)^3 - e^3 = 0$

$$\begin{aligned} \left(e^{e^{3x}}\right)^3 - e^3 = 0 &\Longleftrightarrow e^{3e^{3x}} = e^3 \\ &\Longleftrightarrow 3e^{3x} = 3 \\ &\Longleftrightarrow e^{3x} = 1 \\ &\Longleftrightarrow 3x = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Soit S_2 l'ensemble solution de cette équation:

$$S_2 = \{0\}$$

3. $e^{2x-3} \times e^{2x+1} = \dfrac{1}{e^2}$

$$\begin{aligned} e^{2x-3} \times e^{2x+1} = \frac{1}{e^2} &\iff e^{2x-3+2x+1} = e^{-2} \\ &\iff e^{4x-2} = e^{-2} \\ &\iff 4x-2 = -2 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

Soit S_3 l'ensemble solution de cette équation:

$$S_3 = \{0\}$$

4. $\dfrac{e^{x^2}}{\left(e^{2x-1}\right)^2} - \dfrac{1}{e} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{e^{x^2}}{\left(e^{2x-1}\right)^2} - \frac{1}{e} = 0 &\iff \frac{e^{x^2}}{e^{2(2x-1)}} = \frac{1}{e} \\ &\iff e^{x^2-2(2x-1)} = e^{-1} \\ &\iff e^{x^2-4x+2} = e^{-1} \\ &\iff x^2-4x+2 = -1 \\ &\iff x^2-4x+3 = 0 \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de cette équation:
$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4 = 2^2$
$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes:
$x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$
Soit S_4 l'ensemble solution de cette équation:

$$S_4 = \{1, 3\}$$

Exercice 7 :

$(E) : e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$

1. Posons $X = e^x$
$X = e^x$ donc $X^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$
Donc l'équation (E) devient: $X^2 + 2X - 3 = 0$

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation d'inconnue X.
Soit Δ le discriminant de l'équation $X^2 + 2X - 3 = 0$.
$\Delta = 2^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16 = 4^2$
$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes:
$X_1 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$ et $X_2 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$
D'où -3 et 1 sont les solutions de l'équation $X^2 + 2X - 3 = 0$

3. Déduisons les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{R}$.
De ce qui précède -3 et 1 sont les solutions de l'équation $X^2+2X-3 = 0$
or $X = e^x$
Donc $e^x = 1$ et $e^x \neq -3$ car pour tout $x \in \mathbb{R} e^x > 0$
Par suite, $e^x = 1 \Longleftrightarrow x = 0$
Soit S l'ensemble solution de l'équation (E): $S = \{0\}$

