FONCTION EXPONENTIELLE

CORRECTION DES EXERCICES

CALCULS AVEC LA FONCTION EXPONENTIELLE

Exercice 1 :

Déterminons la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur le domaine indiqué.

1. $u(x) = \exp(2x)$ sur $D_u = \mathbb{R}$
Pour tout $x \in D_u$, on a: $u'(x) = (2x)' \exp(2x)$
D'où $u'(x) = 2\exp(2x)$

2. $f(x) = 5\exp(x) - 4x + 1$ sur $D_f = \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in D_f$, on a: $f'(x) = 5(\exp(x))' - (4x+1)'$
D'où $f'(x) = 5\exp(x) - 4$

3. $g(x) = (3x^2 + \sqrt{5})\exp(x)$ sur $D_g = \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in D_g$, on a: $g'(x) = (3x^2 + \sqrt{5})' \exp(x) + (3x^2 + \sqrt{5})(\exp(x))'$
donc $g'(x) = 6x\exp(x) + (3x^2 + \sqrt{5})\exp(x)$
D'où $g'(x) = (3x^2 + 6x + \sqrt{5})\exp(x)$

4. $h(x) = \dfrac{1 + 2\exp(x)}{3x - 1}$ sur $D_h = \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{3}\}$.
Pour tout $x \in D_h$, on a:

$$h'(x) = \frac{(1+2\exp(x))'(3x-1) - (3x-1)'(1+2\exp(x))}{(3x-1)^2}$$

Donc $g'(x) = \dfrac{2\exp(x)(3x-1) - 3(1+2\exp(x))}{(3x-1)^2}$

D'où $g'(x) = \dfrac{(6x-8)\exp(x) - 3}{(3x-1)^2}$

Exercice 2 :

Déterminons la dérivée de chacune des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ ci-dessous.

1. $f(x) = 3e^x - e^{-x}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a:

$f'(x) = 3(e^x)' - (e^{-x})' \iff f'(x) = 3e^x + e^{-x}$

D'où $f'(x) = 3e^x + e^{-x}$

2. $f(x) = 2x^3e^x + e^2$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a:

$f'(x) = (2x^3)'e^x + 2x^3(e^x)' + (e^2)' \iff f'(x) = 6x^2e^x + 2x^3e^x$

D'où $f'(x) = 6x^2e^x + 2x^3e^x$

3. $g(t) = -2e^{-t} + 2t^3 - 3e^3$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a:

$g'(t) = -2(e^{-t})' + 2(t^3)' - (3e^3)' \iff g'(t) = 2e^{-t} + 6t^2$

D'où $g'(t) = 2e^{-t} + 6t^2$

4. $g(t) = e^4e^{\sqrt{2}t} + e^{-5t-6}$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned} g'(t) &= e^4(e^{\sqrt{2}t})' + (e^{-5t-6})' \\ &= e^4(\sqrt{2}t)'e^{\sqrt{2}t} + (-5t-6)'e^{-5t-6} \\ &= \sqrt{2}e^4e^{\sqrt{2}t} - 5e^{-5t-6} \end{aligned}$$

D'où $g'(t) = \sqrt{2}e^4e^{\sqrt{2}t} - 5e^{-5t-6}$

5. $g(t) = \dfrac{e^{2t}}{1+e^{2t}}$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{(e^{2t})'(1+e^{2t}) - (1+e^{2t})'e^{2t}}{(1+e^{2t})^2} \\ &= \frac{2e^{2t}(1+e^{2t}) - 2e^{2t}e^{2t}}{(1+e^{2t})^2} \\ &= \frac{2e^{2t}}{(1+e^{2t})^2} \end{aligned}$$

D'où $g'(t) = \dfrac{2e^{2t}}{(1+e^{2t})^2}$

6. $g(t) = -\sqrt{3}te^{-\sqrt{3}t+2}$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned} g'(t) &= (-\sqrt{3}t)'e^{-\sqrt{3}t+2} - \sqrt{3}t(e^{-\sqrt{3}t+2})' \\ &= -\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}t+2} - \sqrt{3}t(-\sqrt{3}t+2)'e^{-\sqrt{3}t+2} \\ &= -\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}t+2} - \sqrt{3}t(-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t+2} \\ &= -\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}t+2} + 3te^{-\sqrt{3}t+2} \\ &= (3t-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t+2} \end{aligned}$$

D'où $g'(t) = (3t-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t+2}$

Exercice 3 :

Déterminons la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = \mathrm{e}^x - 2x + \mathrm{e}^3$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 2$

2. $f(x) = \left(\mathrm{e}^x + \sqrt{3}\right)(\mathrm{e}^x - \mathrm{e})$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = e^x\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\right) + e^x\left(\mathrm{e}^x + \sqrt{3}\right)$
D'où $f'(x) = e^x(2e^x - e + \sqrt{3})$

3. $f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 3}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 3) - \mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x - 1)}{(\mathrm{e}^x + 3)^2}$
D'où $f'(x) = \dfrac{7\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 3)^2}$

4. $f(x) = e^{x^4 + 2x^2 - 1}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = (x^4 + 2x^2 - 1)'e^{x^4+2x^2-1} = (4x^3 + 4x)e^{x^4+2x^2-1}$
D'où $f'(x) = (4x^3 + 4x)e^{x^4+2x^2-1}$