FONCTION EXPONENTIELLE

CORRECTION DES EXERCICES

LES RELATIONS FONCTIONNELLES:

Exercice 1 :

Donnons une écriture simplifiée au maximum des nombres réels suivants.

1. $X = e^5 \times (e^3 \times e^{-5}) \times e^{-3}$

$$\begin{aligned} X &= e^5 \times (e^3 \times e^{-5}) \times e^{-3} \\ &= e^5 \times e^{3-5} \times e^{-3} \\ &= e^5 \times e^{-2} \times e^{-3} \\ &= e^{5-2} \times e^{-3} \\ &= e^3 \times e^{-3} \\ &= e^{3-3} \\ &= e^0 \\ \text{D'où} \quad X &= 1 \end{aligned}$$

2. $Y = \dfrac{(e^4)^2}{e^{-2}}$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{(e^4)^2}{e^{-2}} \\ &= \frac{e^{4\times 2}}{e^{-2}} \\ &= e^8 \times e^2 \\ &= e^{8+2} \\ Y &= e^{10} \end{aligned}$$

3. $Z = \dfrac{e^{-3} \times e^{8}}{e^{3}}$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{e^{-3} \times e^{8}}{e^{3}} \\ &= \frac{e^{-3+8}}{e^{3}} \\ &= \frac{e^{5}}{e^{3}} \\ &= e^{5+3} \\ &= e^{8} \end{aligned}$$

4. $W = \dfrac{(e^{-2})^3 \times e^{3}}{(e^{2} \times e)^2}$

$$\begin{aligned} W &= \frac{(e^{-2})^3 \times e^{3}}{(e^{2} \times e)^2} \\ &= \frac{e^{-2\times 3} \times e^{3}}{(e^{2+1})^2} \\ &= \frac{e^{-6} \times e^{3}}{e^{3\times 2}} \\ &= \frac{e^{-6+3}}{e^{6}} \\ &= e^{-3} \times e^{-6} \\ &= e^{-3-6} \\ W &= e^{-9} \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Donnons une écriture simplifiée au maximum des expressions suivantes où x est un réel quelconque.

1. $f_1(x) = e^{3x} \times (e^{x+1})^3 \times e^{-6x}$

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= e^{3x} \times (e^{x+1})^3 \times e^{-6x} \\
&= e^{3x} \times e^{3(x+1)} \times e^{-6x} \\
&= e^{3x} \times e^{3x+3} \times e^{-6x} \\
&= e^{3x+3x+3} \times e^{-6x} \\
&= e^{6x+3} \times e^{-6x} \\
&= e^{6x+3-6x} \\
f_1(x) &= e^3
\end{aligned}$$

2. $f_2(x) = \dfrac{2e^{x^2}}{(e^x)^2}$

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= \frac{2e^{x^2}}{(e^x)^2} \\
&= \frac{2e^{x^2}}{e^{2x}} \\
&= 2e^{x^2-2x} \\
f_2(x) &= 2e^{x(x-2)}
\end{aligned}$$

3. $f_3(x) = \dfrac{2e^{x-1} \times e^{4x+1}}{e^{3x}}$

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= \frac{2e^{x-1} \times e^{4x+1}}{e^{3x}} \\
&= \frac{2e^{x-1+4x+1}}{e^{3x}} \\
&= \frac{2e^{5x}}{e^{3x}} \\
&= 2e^{5x-3x} \\
f_3(x) &= 2e^{2x}
\end{aligned}$$

4. $f_4(x) = \dfrac{e^{-3x} \times e^{x+1}}{e^{-2x-2}}$

$$\begin{aligned}
f_4(x) &= \frac{e^{-3x} \times e^{x+1}}{e^{-2x-2}} \\
&= \frac{e^{-3x+x+1}}{e^{-2x-2}} \\
&= \frac{e^{-2x+1}}{e^{-2x-2}} \\
&= e^{-2x+1-(-2x-2)} \\
&= e^{-2x+1+2x+2} \\
f_4(x) &= e^{3}
\end{aligned}$$

Exercice 3 :

Donnons une écriture simplifiée au maximum des expressions suivantes où t est un réel quelconque.

1. $u(t) = e^{2t} \times (e^{3-4t})^2 \times e^{2t+1}$

$$\begin{aligned}
u(t) &= e^{2t} \times (e^{3-4t})^2 \times e^{2t+1} \\
&= e^{2t} \times e^{2(3-4t)} \times e^{2t+1} \\
&= e^{2t} \times e^{6-8t} \times e^{2t+1} \\
&= e^{2t+6-8t} \times e^{2t+1} \\
&= e^{6-6t+2t+1} \\
u(t) &= e^{7-4t}
\end{aligned}$$

2. $v(t) = \dfrac{e^{2t+5}}{e^{4t+3}}$

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{e^{2t+5}}{e^{4t+3}} \\
&= e^{2t+5-(4t+3)} \\
&= e^{2t+5-4t-3} \\
&= e^{2-2t} \\
v(t) &= e^{2(1-t)}
\end{aligned}$$

3. $w(t) = \dfrac{e^{2t-1} \times e^{5(t+1)}}{e^{4t+2}}$

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{e^{2t-1} \times e^{5(t+1)}}{e^{4t+2}} \\ &= \frac{e^{2t-1+5(t+1)}}{e^{4t+2}} \\ &= \frac{e^{2t-1+5t+5}}{e^{4t+2}} \\ &= \frac{e^{7t+4}}{e^{4t+2}} \\ &= e^{7t+4-(4t+2)} \\ &= e^{7t+4-4t-2} \\ w(t) &= e^{3t+2} \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Simplifions l'écriture de chacun des nombres suivants, où x désigne un nombre réel.

1. $A = (e^x)^5 \times e^{-x}$

$$\begin{aligned} &A = (e^x)^5 \times e^{-x} = e^{5x} \times e^{-x} = e^{5x-x} = e^{4x} \\ &A = e^{4x} \end{aligned}$$

2. $B = \dfrac{e^{2x-5}}{e^{2x-7}}$

$$\begin{aligned} &B = \frac{e^{2x-5}}{e^{2x-7}} = e^{2x-5-(2x-7)} = e^{2x-5-2x+7} = e^2 \\ &B = e^2 \end{aligned}$$

3. $C = \dfrac{e^{3x}}{(e^x)^6 \times e}$

$$\begin{aligned} &C = \frac{e^{3x}}{e^6 x \times e} = \frac{e^{3x}}{e^6 x + 1} = e^{3x-(6x+1)} = e^{3x-6x-1} = e^{-3x-1} \\ &C = e^{-(3x+1)} \end{aligned}$$

4. $D = \dfrac{e \times e^{2x-1}}{2e^{-x-2}}$

$D = \dfrac{e^{1+2x-1}}{2e^{-x-2}}$

$D = \dfrac{e^{2x}}{2e^{-x-2}}$

$D = \dfrac{e^{2x-(-x-2)}}{2}$

$D = \dfrac{e^{2x+x+2}}{2}$

$D = \dfrac{e^{3x+2}}{2}$

Exercice 5 :

Prouvons que, pour tout réel x, on a : $e^{-x} + e^{-3x} = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{3x}}$.

On a: $e^{-x} + e^{-3x} = e^{-x} + \dfrac{1}{e^{3x}} = \dfrac{e^{-x} \times e^{3x} + 1}{e^{3x}} = \dfrac{e^{-x+3x}}{e^{3x}} = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{3x}}$

D'où le résultats.