CORRECTION CONTRÔLE 13

Exercice 1 :

f est une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$.

1. Déterminons la forme canonique de f.
   $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$.
   f est sous la forme de $ax^2 + bx + c$ avec $a = -3$, $b = 5$, et $c = -2$.
   Ainsi, la forme canonique de f est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
   Alors $\alpha = -\dfrac{5}{2 \times (-3)} = \dfrac{5}{6}$ et
   $$\begin{aligned}\beta = f\left(\frac{5}{6}\right) &= -3\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 5\left(\frac{5}{6}\right) - 2 \\ &= -3 \times \frac{25}{36} + \frac{25}{6} - 2 \\ &= -\frac{25}{12} + \frac{25}{6} - 2 \\ &= \frac{-25 + 50 - 24}{12} \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$
   Par conséquent, $f(x) = -3\left(x - \dfrac{5}{6}\right)^2 + \dfrac{1}{12}$

2. Déduisons que pour tout nombre réel x, on a $f(x) \leq \dfrac{1}{12}$.
   De la question précédente on a: $f(x) = -3\left(x - \dfrac{5}{6}\right)^2 + \dfrac{1}{12} = -3\left[\left(x - \dfrac{5}{6}\right)^2 - \dfrac{1}{36}\right]$
   On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$;
   $$\begin{aligned}\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} \geq -\frac{1}{36} \\ &\Leftrightarrow -3\left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\right] \leq \frac{3}{36} \\ &\Leftrightarrow f(x) \leq \frac{1}{12}\end{aligned}$$
   D'où le résultat.

Exercice 2 :

Résolvons les équations suivantes.

1. $3x^2 + 10x + 6 = 0$.
   Soit Δ le discriminant de cette équation.
   $\Delta = 10^2 - 4(3)(6) = 100 - 72 = 28$
   $\Delta = (2\sqrt{7})^2 > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distincts

$$x_1 = \frac{-10 - 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-5 - \sqrt{7}}{3} \text{ et } x_2 = \frac{-10 + 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-5 + \sqrt{7}}{3}$$

2. $2x^2 - 6x + 5 = 0$.
   Soit Δ le discriminant de cette équation: $\Delta = (-6)^2 - 4(2)(5) = 36 - 40 = -4$.
   $\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solutions réelles.

Exercice 3 :

Soit le trinôme $6x^2 + x - 2$

1. Écrivons le trinôme sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.
   Passons par la forme canonique de ce trinôme:

$$\begin{aligned}
6x^2 + x - 2 &= 6\left[x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{2}{6}\right] \\
&= 6\left[\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{1}{144} - \frac{1}{3}\right] \\
&= 6\left[\left((x + \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{49}{144}\right] \\
&= 6\left[\left((x + \frac{1}{12}\right)^2 - \left(\frac{7}{12}\right)^2\right] \\
&= 6\left[\left((x + \frac{1}{12}\right) - \left(\frac{7}{12}\right)\right]\left[\left((x + \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{7}{12}\right)\right] \\
&= 6\left(x - \frac{6}{12}\right)\left(x + \frac{8}{12}\right) \\
&= 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) \\
&= (2x - 1)(3x + 2)
\end{aligned}$$

2. Étudions le signe de ce trinôme suivant les valeurs de x en dressant un tableau de signes.
   Posons $6x^2 + x - 2 = 0$
   De la question précédente, $6x^2 + x - 2 = (2x - 1)(3x + 2)$
   Ainsi $6x^2 + x - 2 = 0 \iff (2x - 1)(3x + 2) = 0$ d'où l'équation admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = -\frac{2}{3}$

Cont.

Faisons un tableau de signe de la fonction $x \mapsto 6x^2 + x - 2$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$6x^2 + x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 4 :

1. Démontrons que, pour tout nombre x de $I, S(x) = -x^2 + 6x + 72$
   L'aire de la partie grise est la somme de l'aire du triangle NPD et du trapèze MBCP
   Soit $A_1(x)$ l'aire du triangle NPD et $A_2(x)$ l'aire du triangle MBCP en fonction de x
   On a: $S(x) = A_1(x) + A_2(x)$
   $A_1(x) = \dfrac{ND + NP}{2} = \dfrac{(12-x)x}{2}$ et $A_2(x) = \dfrac{(BC + MP)BM}{2} = \dfrac{(12+x)(12-x)}{2}$

$$\begin{aligned} \text{D'où } S(x) &= \frac{(12-x)x}{2} + \frac{(12+x)(12-x)}{2} \\ &= \frac{12-x}{2}\left[x + 12 + x\right] \\ &= \frac{12-x}{2}(2x+12) \\ &= (12-x)(x+6) \\ &= 12x + 72 - x^2 - 6x \\ S(x) &= -x^2 + 6x + 72 \end{aligned}$$

   D'où le résultat.

2. Déterminons la valeur de x pour laquelle $S(x)$ est maximale
   La courbe représentative du trinôme $x \mapsto -x^2+6x+72$ est une parabole tournée vers le bas et la valeur maximale de $S(x)$ est atteinte lorsqu'on est au sommet de cette parabole. Déterminons donc les coordonnées du sommet de cette parabole. On a :

$$\begin{aligned} S(x) &= -x^2 + 6x + 72 \\ &= -(x^2 - 6x - 72) \\ &= -[(x-3)^2 - 9 - 72] \\ S(x) &= -(x-3)^2 + 81 \end{aligned}$$

   D'où le sommet de la parabole a pour coordonnées $(3, 81)$
   Ainsi la valeur de x pour laquelle $S(x)$ est maximale est $x = 3$
   L'aire maximale est $S(3) = 81cm^2$

The End.