CORRECTION 11: Probabilités, polynômes du second degré

Exercice 1 :

Vérifions si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant rapidement nos réponses.

1. pour tout réel $x, 9x^2 - 6x + 2 > 0$
   Posons $9x^2 - 6x + 2 = 0$
   Soit Δ le discriminant de cette équation.
   $\Delta = (-6)^2 - 4(9)(2) = 36 - 72 = -36$
   $\Delta < 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $9x^2 - 6x + 2 > 0$ D'où cette affirmation est vraie.

2. $f(x) = -2x^2 + 8x - 1$ a pour minimum 7
   Cette affirmation est fausse car :
   Pour $x = 0$ on a: $f(0) = -1 < 7$. Ainsi 7 n'est pas le minimum de f.

3. (*)Soit x_1 et x_2 les deux racines du trinôme $ax^2 + bx + c$ alors $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-b}{c}$
   Cette affirmation est vraie car :

   x_1 et x_2 sont les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$ donc $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \frac{c}{a}$
   Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} \\ &= \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= -\frac{b}{c}\end{aligned}$$

   D'où l'affirmation est bien vraie.

Exercice 2 :

Résolvons les équations et inéquations suivantes:

1. $x^2 + 4x = -2x - 9$
   $x^2 + 4x = -2x - 9 \iff x^2 + 6x + 9 = 0$
   Résolvons donc l'équation $x^2 + 6x + 9 = 0$

Soit Δ le discriminant de cette équation.
$\Delta = 6^2 - 4(1)(9) = 0$
$\Delta = 0$ donc cette équation admet une solution unique:

$$x_0 = -\frac{4}{2} = -2$$

Soit S l'ensemble solution de cette équation: $S = \{-2\}$

2. $4x^2 + 3x > 0$
Posons $4x^2 + 3x = 0$

$$\begin{aligned} 4x^2 + 3x = 0 &\iff x(4x+3) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 4x + 3 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Faisons un tableau de signe de la fonction $x \mapsto 4x^2 + 3x$

x	$-\infty$		0		$-\frac{3}{4}$		$+\infty$
x		$-$	0	$-$	$\vert$	$+$	
$4x + 3x$		$-$	$\vert$	$+$	0	$+$	
$4x^2 + 3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Soit S l'ensemble solution de l'inéquation $4x^2 + 3x > 0$
$S =]-\infty, -\frac{3}{4}[\cup]0, +\infty[$

3. $-x^2 + 5x - 4 \geq 0$
Posons $-x^2 + 5x - 4 = 0$
Soit Δ le discriminant de cette équation.

$$\begin{aligned} \Delta &= 5^2 - 4(-1)(-4) \\ &= 25 - 16 \\ \Delta &= 3^2 \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes:

$$x_1 = \frac{-5-3}{-2} = 4 \text{ et } x_2 = \frac{-5+3}{-2} = 1$$

Faisons un tableau de signe de la fonction $x \mapsto -x^2 + 5x - 4$

Cont.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$-x^2 + 5x - 4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Soit S l'ensemble solution de l'inéquation $4x^2 + 3x \geq 0$
$S = [1, 4]$

Exercice 3 :

On donne les expressions suivantes définies pour tout réel x : $f(x) = 6x^2 - 15x + 7$ et $g(x) = 4x - 3$

A. Etude graphique.

1. Complétons la représentation graphique sur l'annexe en y traçant C_g
   La courbe représentative C_g de g est une droite d'équation $y = 4x - 3$
   (Voir annexe)

2. avec la précision permise par le graphique donnons :

   (a) Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$.
   $f(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty; 0,62[\cup]1,87; +\infty[$

   (b) L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.
   L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les points en lesquels la courbe C_g et la courbe C_f se coupent.
   Soit S l'ensemble solution de cette équation.

$$S = \{(0,66; -0.33), (2,5; 7)\}$$

B. Étude algébrique. PAP tout sauf B.1

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geq 0$.
   Posons $f(x) = 0$; $f(x) = 0 \Longleftrightarrow 6x^2 - 15x + 7 = 0$
   Soit Δ le discriminant de cette équation:
   $\Delta = (-15)^2 - 4(6)(7) = 57$
   $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes:

$$x_1 = \frac{15 - \sqrt{57}}{12} \text{ et } x_2 = \frac{15 + \sqrt{57}}{12}$$

   Faisons un tableau de signe de la fonction $x \mapsto f(x)$

x	$-\infty$		$\frac{15-\sqrt{57}}{12}$		$\frac{15+\sqrt{57}}{12}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Cont.

Soit S l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \geq 0$

$$S =]-\infty; \frac{15-\sqrt{57}}{12}[\cup]\frac{15+\sqrt{57}}{12}; +\infty[$$

On peut en déduire que la courbe C_f de f est une courbe parabolique tournée vers le haut.

2. Résolvons $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff f(x) - g(x) = 0 \\ &\iff 6x^2 - 15x + 7 - 4x + 3 = 0 \\ &\iff 6x^2 - 19x + 10 = 0 \end{aligned}$$

Résolvons l'équation $6x^2 - 19x + 10 = 0$
Soit Δ le discriminant de cette équation
$\Delta = (-19)^2 - 4(6)(10) = 361 - 240 = 121 = 11^2$
$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes:

$$x_1 = \frac{19-11}{12} = \frac{2}{3} \text{ et } x_2 = \frac{19+11}{12} = \frac{5}{2}$$

Soit S l'ensemble solution de l'équation $f(x) = g(x)$

$$S = \left\{\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right\}$$

Déduisons les coordonnées exactes des points d'intersection des courbes C_f et C_g. Soit A et B les points d'intersection des courbes C_f et C_g d'abscisses respectives $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{2}$
Pour $x = \frac{2}{3}$, on a: $g\left(\frac{2}{3}\right) = 4 \times \frac{2}{3} - 3 = -\frac{1}{3}$ donc $A\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$
Pour $x = \frac{5}{2}$, on a : $g\left(\frac{5}{2}\right) = 4 \times \frac{5}{2} - 3 = 7$ donc $B\left(\frac{5}{2}, 7\right)$
D'où les courbes C_f et C_g sont sécantes aux points : $A\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ et $B\left(\frac{5}{2}, 7\right)$

3. Déterminons par le calcul les positions relatives de C_f et C_g.
Étudions le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$
D'après la question précédente, la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$ s'annule en $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{2}$.
Faisons le tableau de signe de la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi pour tout $x \in]-\infty; \frac{2}{3}[$ on a: $f(x) - g(x) > 0$ d'où la courbe représentative C_f de la fonction f est au dessus de la courbe représentative C_g de g.

Cont.

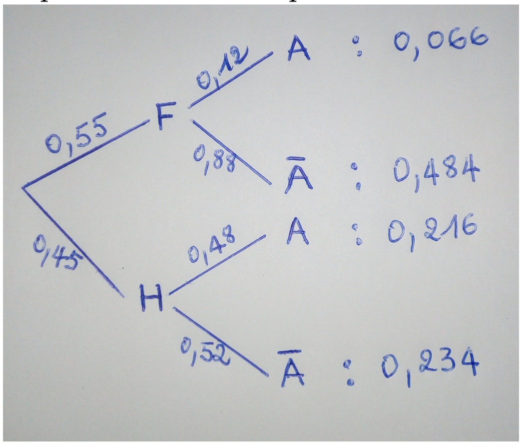
Pour tout $x \in]\frac{2}{3}; \frac{5}{2}[$ on a: $f(x) - g(x) < 0$ d'où la courbe représentative C_f de la fonction f est en dessous de la courbe représentative C_g de g.
Et pour tout $x \in]\frac{5}{2}; +\infty[$ on a: $f(x) - g(x) > 0$ d'où la courbe représentative C_f de la fonction f est au dessus de la courbe représentative C_g de g.

Exercice 4 :

1. Déterminons à quel intervalle appartient le réel x.
   On a $BN = 2x$ et $BN < 10$ alors $0 < 2x < 10$ donc $0 < x < 5$.
   D'où $x \in]0, 5[$
2. Calculons l'aire du triangle DMN pour $x = 1$
   Soit A l'aire du triangle DMN, A_0 l'aire du carré $ABCD$, A_1 l'aire du triangle DCN, A_2 l'aire du triangle DAM et A_3 l'aire du triangle NBM
   On a: $A = A_0 - (A_1 + A_2 + A_3)$
   Pour $x = 1$ on a: $A_0 = 100cm^2$, $A_1 = 5(10 - 2) = 40$, $A_2 = 5$ et $A_3 = 1(10 - 1) = 9$
   Donc $A = 100 - (40 + 5 + 9)$ d'où $A = 46cm^2$
3. (*)Montrons que l'aire de ce triangle est égale à $x^2 - 5x + 50$.
   On a : $A_1 = 5(10 - x)$, $A_2 = 5x$ et $A_3 = x(10 - x)$ donc:
$$\begin{aligned} A &= 100 - [5(10-x) + 5x + x(10-x)] \\ &= 100 - (50 - 10x + 5x + 10x - x^2) \\ &= 100 - (50 + 5x - x^2) \\ A &= x^2 - 5x + 50 \end{aligned}$$
   D'où le résultat.
4. Position du point M pour que l'aire du triangle soit égale au trois quarts de l'aire du carré.
   Posons $AM = x$; trois quarts de l'aire du carré est égal à $75cm^2$ On a:
$$\begin{aligned} 1cm &\longleftrightarrow 46cm^2 \\ x &\longleftrightarrow 75cm^2 \end{aligned}$$
   On en déduit que $x = \frac{75cm^2 \times 1cm}{46cm^2} = 1,63cm$
   D'où $AM = 1.63cm$

Exercice 5 :

1. Reproduisons et complétons l'arbre de probabilités.



Cont.

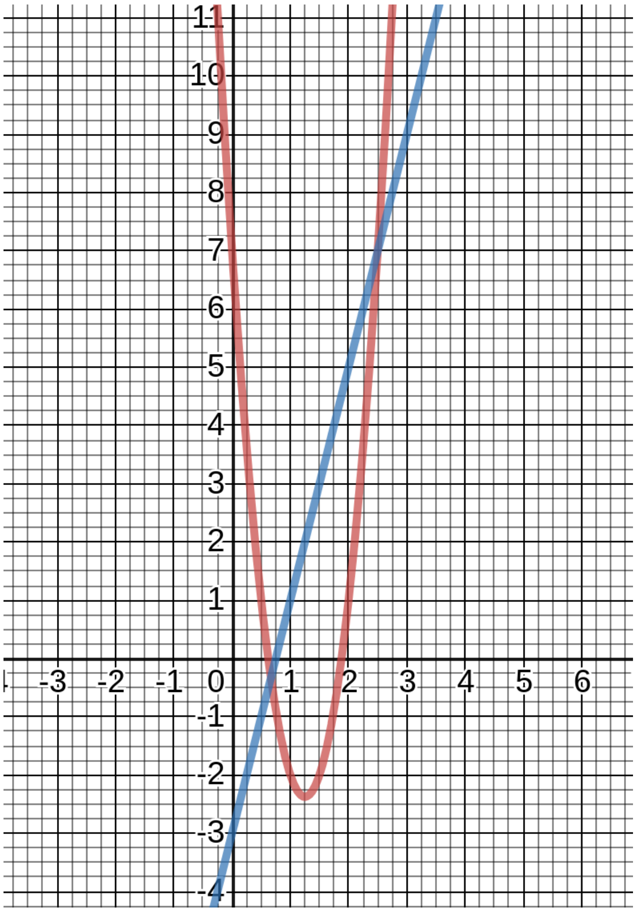
2. Définissons par une phrase l'évènement H∩A.
   H∩A: «L l'échantillon choisi est un parfum pour homme et de marque Alpha» Calculons la probabilité de l'évènement H∩A. A partir de l'arbre de probabilités on retrouve la branche qui porte à la fois les instructions H et A puis on fait le produit des probabilités sur cette branche: Ce cas de figure se produit seulement sur la troisième branche de l'arbre de probabilité. Ainsi $P(H \cap A) = 0,45 \times 0,48 = 0,216$

3. Montrons que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,282.
   A partir de l'arbre de probabilité, seules la première et la troisième branche porte l'instruction A donc la probabilité cherchée est la somme des probabilités de ces deux branches.
   Ainsi $P(A) = P(F \cap A) + P(H \cap A)$ or $P(F \cap A) = 0,55 \times 0,12 = 0,066$ et $P(H \cap A) = 0,216$
   Donc $P(A) = 0,066 + 0,216 = 0,282$. D'où $P(A) = 0,282$

4. Calculons la probabilité que l'échantillon soit un parfum pour homme sachant qu'il est de la marque Alpha. Il s'agit de calculer $P_A(H)$
   On a:

$$\begin{aligned} P_A(H) =& \frac{P(A \cap H)}{P(A)} \\ =& \frac{0,218}{0,282} \\ P_A(H) =& 0,766 \end{aligned}$$

Annexe exo 3 :



The End.