CORRECTION CONTRÔLE 14

Exercice 1 :

Soient g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{x}$, et C_g sa courbe représentative.

1. Déterminons l'ensemble de définition de g, et son ensemble de dérivabilité.
   $D_g = \{x \in \mathbb{R}/x \neq 0\}$
   D'où $D_g = \mathbb{R}^*$
   g étant une fonction rationnelle alors elle est continue et dérivable sur son domaine de définition.
   Ainsi g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

2. Démontrons par le calcul, en utilisant le taux de variation que $g'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.

$$\begin{aligned}
\text{Soit } h \in \mathbb{R}^*, g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x-x-h}{x^2+xh}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{x^2+xh} \\
g'(x) &= -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

3. Déterminons l'équation de la tangente T à la courbe C_g au point A d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.
   On a : $(T) : y = g'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ avec $g'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -4$ et $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$ donc

$$\begin{aligned}
(T) :& y = -4\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2 \\
\text{D'où} \quad (T) :& y = -4x + 4
\end{aligned}$$

4. Déterminons les coordonnées du point B, différent de A, de C_g en lequel la tangente à C_g est parallèle à T.
   Soit (T') la tangente à C_g au point B.
   $(T') : y = g'(x_B)(x - x_B) + g(x_B)$

Les tangentes (T) et (T') étant parallèles alors elles ont le même coefficient directeur donc $g'(x_B) = -4$

$g'(x_B) = -4 \Longleftrightarrow -\dfrac{1}{x_B^2} = -4 \Longleftrightarrow x_B^2 = \dfrac{1}{4}$ donc $x_B = \dfrac{1}{2}$ ou $x_B = -\dfrac{1}{2}$

Ainsi $x_B = -\dfrac{1}{2}$ car $\dfrac{1}{2}$ est l'abscisse du point en lequel (T) est tangent à la courbe C

On a : $g(x_B) = g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2$ alors $(T') : y = -4\left(x + \dfrac{1}{2}\right) - 2$

D'où $(T') : y = -4x - 4$

Déterminons y_B

$y_B = -4\,(x_B) - 4 \Longleftrightarrow y_B = -4\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 4 = -2$

D'où $B\left(-\dfrac{1}{2}, -2\right)$

Exercice 2 :

Soit la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$

1. Calculons les termes u_1 à u_5
   - $u_1 = u_{0+1} = \dfrac{1}{2}u_0 = \dfrac{1}{2} \times 1$ donc $u_1 = \dfrac{1}{2}$
   - $u_2 = u_{1+1} = \dfrac{1}{2}u_1 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}$ donc $u_2 = \dfrac{1}{4}$
   - $u_3 = u_{2+1} = \dfrac{1}{2}u_2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4}$ donc $u_3 = \dfrac{1}{8}$
   - $u_4 = u_{3+1} = \dfrac{1}{2}u_3 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{8}$ donc $u_4 = \dfrac{1}{16}$
2. Conjecturons une formule explicite qui donne u_n en fonction de n

$$u_n = \frac{1}{2^n}$$

3. Démontrons que la conjecture est valide en retrouvant par le calcul la valeur de u_0 et l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

   On a : $u_0 = \dfrac{1}{2^0} = 1$

   De plus, $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2 \times 2^n} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} \\ u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n \end{aligned}$$

   D'où la conjecture est bien valide.

Exercice 3 :

1. (a) Pour chacune des deux séries, calculons l'arrondi au dixième de la moyenne et de l'écart-type.
   Soit $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les moyennes respectives des séries de la Seine à Paris et du Rhône à Beaucaire
   On a: $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{12}$, $Var(x) = \dfrac{1}{12}\sum(x_i - \bar{x})^2$ et $\sigma_x = \sqrt{Var(x)}$
   $\bar{x} = \dfrac{3100}{12} = 258.3;$
   $Var(x) = \dfrac{\frac{860414}{3}}{12} = \dfrac{430207}{18} = 23900.4$
   $\sigma_x = \sqrt{23900.4} = 154.6$
   $\bar{y} = \dfrac{19365}{12} = 1613.8;$
   $Var(y) = \dfrac{1}{12}\left[\dfrac{7457673}{4}\right] = \dfrac{2485891}{16} = 155368.2$
   $\sigma_y = \sqrt{155368.2} = 394.2$

   (b) Le fleuve qui semble être le plus capricieux est le fleuve du Rhône à Beaucaire car $\sigma_y > \sigma_x$

2. (a) Relativisons la valeur de l'écart-type σ à la moyenne $\bar{x}$ en calculant le coefficient de variation $\dfrac{\sigma}{x}$ de chaque série.
   Soit C_1 le coefficient de variation de la série de la Seine à Paris et C_2 celle de la série du Rhône à Beaucaire
   $C_1 = \dfrac{\sigma_x}{\bar{x}} = \dfrac{154.6}{258.3} = 0.59$ et $C_2 = \dfrac{\sigma_y}{\bar{y}} = \dfrac{394.2}{1613.8} = 0.24$

   (b) De ce qui précède, $C_1 > C_2$ on peut donc en déduire que le fleuve de la Seine à Paris est en réalité le plus capricieux.

Exercice 4 :

1. Déterminer le salaire moyen dans l'entreprise.
   Soit M le salaire moyen dans l'entreprise.
   $M = \dfrac{15 \times 4 + 17 \times 6 + 20 \times 10 + 24 \times 14 + 36 \times 5}{40}$
   $M = \dfrac{920}{40} = 23$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $f(x) = \dfrac{1}{40}[4(15 - x)^2 + 6(17 - x)^2 + 10(20 - x)^2 + 14(24 - x)^2 + 5(36 - x)^2 + (42 - x)^2]$

(a) Écrivons $f(x)$ sous la forme d'un trinôme du second degré.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{40}[4(15^2 - 30x + x^2) + 6(17^2 - 34x + x^2) + 10(20^2 - 40x + x^2) + 14(24^2 - 40x + x^2) \\
&\quad + 5(36^2 - 72x + x^2) + (42^2 - 84x + x^2)] \\
&= \frac{1}{14}(40x^2 - 1840x + 22942) \\
&= x^2 - 46x + \frac{22942}{40}
\end{aligned}$$

(b) Mettons ce trinôme sous forme canonique.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 - 46x + \frac{22942}{40} \\
&= \left(x - \frac{46}{2}\right)^2 - \left(\frac{46}{2}\right)^2 + \frac{22942}{40} \\
&= (x - 23)^2 + \frac{891}{20}
\end{aligned}$$

(c) Déduisons le tableau de variation de f.
La fonction f est une fonction polynôme donc elle est continue et dérivable sur son domaine de définition
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2(x - 23)$.
Posons $f'(x) = 0$
$f'(x) = 0 \iff 2(x - 23) = 0 \iff x = 23$
Faisons le tableau de signe de $f'(x)$ et en même temps le tableau de variation de f:

x	$-\infty$		23		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$\frac{891}{20}$	$\nearrow$	$+\infty$

L'extremum de f est $\frac{891}{20}$, et il est atteint pour $x = 23$

(d) Démontrons que la valeur du minimum de f est égale à la variance de la série des salaires.
L'expression de la fonction f est la formule permettant de calculer la variance de cette série statistique avec x sa moyenne. Or la moyenne de cette série statistique est 23 et pour $x = 23$ on a $f(23) = \frac{891}{20}$ qui représente l'extremum trouvé à la question précédente.

The End.