CORRECTION CONTRÔLE 12

Exercice 1 : (PAP : 3 courbes sur les 4)

Retrouvons l'équation de chacune de ces paraboles et justifions:

- (A): $y = (x-3)^2 - 1$
  On a : $(x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8$ donc la parabole de l'équation (A) est tournée vers le haut car le coefficient de x^2 est 1 qui est positif. De plus le sommet de cette parabole est le point $S(3, -1)$.
  D'où la parabole P_4 est la parabole d'équation (A)

- (B) : $y = 2(x-2)(x-4)$
  On a : $2(x-2)(x-4) = 2x^2 - 12x + 16$ donc la parabole de l'équation (B) est tournée vers le haut car le coefficient de x^2 est 2 qui est positif. De plus cette parabole coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $x = 2$ et $x = 4$
  D'où la parabole P_1 est celle d'équation (B).

- (C):$y = x^2 + 1$
  La parabole de (C) est tournée vers le haut et a pour sommet $S(0, 1)$ d'où la parabole P_2 est la parabole d'équation (C)

- (D):$y = -x^2 + 1$
  La parabole de (D) est tournée vers le bas car $-1 < 0$. De plus cette parabole a pour sommet le point $S(0, 1)$ d'où la parabole P_3 est la parabole d'équation (D).

Exercice 2 :

On considère le trinôme $f(x) = 10x^2 + 22x + 12$.

1. Montrons que -1 est racine du trinôme.
   -1 est racine du trinôme si et seulement si $f(-1) = 0$
   Calculons $f(-1)$

$$\begin{aligned} f(-1) &= 10(-1)^2 + 22(-1) + 12 \\ &= 10 - 22 + 12 \\ f(-1) &= 0 \end{aligned}$$

   D'où le résultat.

2. Trouvons l'autre racine de f.
Soit x_1 et x_2 les racines du trinôme $10x^2 + 22x + 12$
On sait que: $x_1 + x_2 = -\frac{22}{10}$ et $x_1x_2 = \frac{12}{10}$
-1 étant une racine du trinôme $10x^2 + 22x + 12$ alors : $-1 \times x_2 = \frac{12}{10}$
Ainsi $x_2 = -\frac{6}{5}$
D'où l'autre racine de f est $-\frac{6}{5}$

3. Déduisons la forme factorisée du trinôme.

$$f(x) = 10(x+1)(x+\frac{6}{5})$$

4. Établissons le tableau de signes du trinôme.

x	$-\infty$		$-\frac{6}{5}$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 3 :

1. Factorisons les expressions suivantes:
a) $f(x) = 5x^2 + 2x$
$f(x) = 5x^2 + 2x = x(5x+2)$
b) $g(x) = (x-1)^2 - (2x-3)^2$

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-1)^2 - (2x-3)^2 \\ &= [(x-1)-(2x-3)][(x-1)+(2x-3)] \\ &= (x-2x-1+3)(x+2x-1-3) \\ g(x) &= (-x+2)(3x-4) \end{aligned}$$

2. Résolvons l'inéquation et l'équation suivantes:
a) $5x^2 + 2x > 0$
De la question 1-a) qui précède on a: $5x^2 + 2x = x(5x+2)$
Posons $x(5x+2) = 0$
$x(5x+2) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{2}{5}$
Faisons le tableau de signe de la fonction $x \mapsto x(5x+3)$

x	$-\infty$		0		$-\frac{2}{5}$		$+\infty$
$x(5x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Cont.

D'où $5x^2 + 2 > 0$ pour tout $x \in \left]-\infty, -\frac{2}{5}\right[\cup]0, +\infty[$
b) $(x-1)^2 = (2x-3)^2$
$(x-1)^2 = (2x-3)^2 \iff (x-1)^2 - (2x-3)^2 = 0$ Or de la question 1-b) $(x-1)^2 - (2x-3)^2 = (-x+2)(3x-4)$
Ainsi $(x-1)^2 = (2x-3)^2 = 0 \iff (-x+2)(3x-4) = 0 \iff x = 2$ ou $x = \frac{4}{3}$
Soit S l'ensemble solution l'équation $(x-1)^2 = (2x-3)^2$:

$$S = \left\{2, \frac{4}{3}\right\}$$

Exercice 4 :

Partie A :

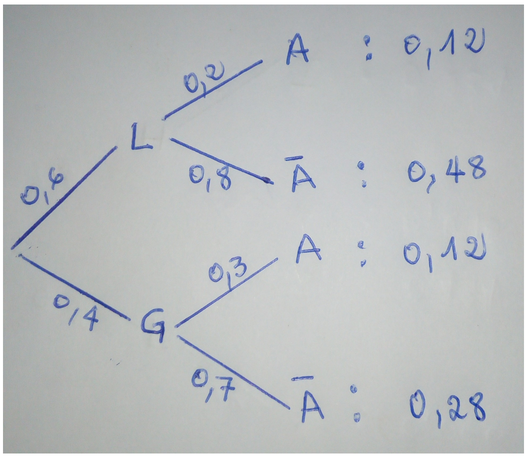
1. Au départ, la carpe se trouve à une profondeur de 4cm.
2. Déterminons l'instant à laquelle la carpe arrivera à la surface de l'eau pour manger.
La carpe arrive à la surface de l'eau lorsqu'elle atteint le sommet $S(2, 0)$ de la parabole représentant sa trajectoire.
Ainsi la carpe arrivera à la surface de l'eau pour manger à l'instant $t = 2s$

Partie B : *question avec prise d'initiative*

1. Oui il nous ai possible d'atteindre la carpe car l'épuisette suit une parabole qui a son sommet en dessous du sommet de la parabole représentant la trajectoire de la carpe.
2. Il y a deux possibilités d'attaques pour atteindre la carpe car la trajectoire suivit par l'épuisette coupe la trajectoire suivit par la carpe à deux reprises aux point $A(1, -1)$ et $B(3, -1)$.
Donc on peut attaquer la carpe aux instants $t_1 = 1s$ et $t_2 = 3s$

Exercice 5 :

1. Faisons un arbre de probabilité pondéré correspondant à l'exercice.



2. On croise un animal

Cont.

(a) Déterminons la probabilité pour que ce soit un guépard et qu'il soit affamé:
Cela revient à déterminer la probabilité de l'évènement "$G \cap A$". En nous basant sur l'arbre de probabilité, cela revient à déterminer la probabilité de la branche où se trouve à la fois les évènements "G" et "A".
Seule la troisième branche de l'arbre de probabilité correspond à cette instruction donc :
$P(G \cap A) = 0.12$

(b) Déterminons la probabilité pour que ce soit un animal affamé
Cela revient donc à déterminer la probabilité de l'évènement "A". En nous basant sur l'arbre de probabilité, cela revient à déterminer la probabilité des branches contenant l'évènement "A". Donc on peut rencontrer un lion affamé ce qui correspond à "$L \cap A$" comme on peut rencontrer un guépard affamé ce qui correspond à "$G \cap A$"
Or $P(L \cap A) = 0,12$ et $P(G \cap A) = 0,12$
D'où $P(A) = 0,12 + 0,12 = 0,24$

3. On croise un animal affamé. Déterminons la probabilité que ce soit un guépard
Cela revient à calculer la probabilité de l'évènement "G" sachant l'évènement "A".

$$\begin{aligned} P_A(G) &= \frac{P(G \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{0,12}{0,24} \\ P_A(G) &= 0,5 \end{aligned}$$

The End.