CONTRÔLE 14

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet est composé de quatre exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 :

Soient g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{x}$, et C_g sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g, et son ensemble de dérivabilité.
2. Démontrer par le calcul, en utilisant le taux de variation (expression du type $f(a+h)$... etc), que $g'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_g au point A d'abscisse $\dfrac{1}{2}$. On notera T cette tangente.
4. Déterminer les coordonnées du point B, différent de A, de C_g en lequel la tangente à C_g est parallèle à T.

Exercice 2 :

Soit la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$

1. Calculez les termes u_1 à u_5 (donner les valeurs exactes, écrire les calculs).
2. Conjecturez une formule explicite qui donne u_n en fonction de n
3. Démontrez que votre conjecture est valide en retrouvant par le calcul la valeur de u_0 et l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

Exercice 3 :

Ce tableau donne le débit mensuel moyen (en m^3/s) de la Seine à Paris, et du Rhône à Beaucaire.

Mois	Jan.	Fév.	Mars	Avr.	Mai	Juin	Jui.	Août	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.
Seine	510	545	445	232	229	157	112	94	99	124	244	309
Rhône	2296	2050	2280	1673	1668	1558	1230	1148	1427	1066	1591	1378

1. (a) Pour chacune des deux séries, calculer l'arrondi au dixième de la moyenne et de l'écart-type (écrire les formules correspondantes, mais pas nécessairement les calculs).

   (b) Quel fleuve semble le plus capricieux ? Justifiez.

2. (a) Relativiser la valeur de l'écart-type σ à la moyenne $\bar{x}$ en calculant le coefficient de variation $\dfrac{\sigma}{x}$ de chaque série.

   (b) Que peut-on déduire de la comparaison de ces coefficients ?

Exercice 4 :

La tableau ci-dessous donne la répartition des salaires annuels, exprimés en milliers d'euros, dans une entreprise.

Salaire	15	17	20	24	36	42
Effectif	4	6	10	14	5	1

1. Déterminer le salaire moyen dans l'entreprise (écrire les calculs).

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = \frac{1}{40}[4(15-x)^2 + 6(17-x)^2 + 10(20-x)^2 + 14(24-x)^2 + 5(36-x)^2 + (42-x)^2]$$

   (a) Écrire $f(x)$ sous la forme d'un trinôme du second degré.

   (b) Mettre ce trinôme sous forme canonique.

   (c) En déduire le tableau de variation de f (justifier l'allure). Quel est son extremum, et pour quelle valeur est-il atteint ?

   (d) Sans calcul, démontrer que la valeur du minimum de f est égale à la variance de la série des salaires.

The End.