CORRECTION CONTRÔLE 7

Exercice 1 :

On considère la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = 2x^3 - 6x - 1$$

1. Calculons la fonction dérivée de f et donnons le résultat sous la forme la plus factorisée possible:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^3 - 6x - 1)' \\ &= 6x^2 - 6 \\ f'(x) &= 6(x^2 - 1) \end{aligned}$$

2. Déterminons l'équation de la droite tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

   Soit (T) l'équation de la droite tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

   On a : $(T) : y = f'\left(\frac{1}{2}\right)(x - \frac{1}{2}) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

   $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{15}{4}$

   $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 6\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) = -\frac{9}{2}$

   Donc $(T) : y = -\frac{9}{2}(x - \frac{1}{2}) - \frac{15}{4} \iff y = -\frac{9}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{15}{4} \iff y = -\frac{9}{2}x - \frac{3}{2}$

   D'où $(T) : y = -\frac{3}{2}(3x - 1)$ est l'équation de la droite tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$

3. Déterminons les deux abscisses en lesquelles la droite tangente à $\mathcal{C}_f$ est horizontale. Soit a l'abscisse d'un point en lequel la droite tangente à C_f soit horizontale alors $f'(a) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(a) = 0 &\iff 6(a^2 - 1) = 0 \\ &\iff a^2 - 1 = 0 \quad \text{car } 6 \neq 0 \\ &\iff a^2 = 1 \\ &\iff a = -1 \text{ ou } a = 1 \end{aligned}$$

   D'où les deux abscisses en lesquels la droite tangente à C_f est horizontale sont $x = -1$ et $x = 1$

Exercice 2 :

Calculons la dérivée des fonctions suivantes en simplifiant au maximum:

- $f(x) = (x^2+5)\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) &= (x^2+5)'\sqrt{x} + (x^2+5)(\sqrt{x})' \\ &= 2x\sqrt{x} + (x^2+5) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x^2+x^2+5}{2\sqrt{x}} \\ f'(x) &= \frac{3x^2+5}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

- $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+5}$ pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) &= \frac{(x^2-1)'(x^2+5) - (x^2+5)'(x^2-1)}{(x^2+5)^2} \\ &= \frac{2x(x^2+5) - 2x(x^2-1)}{(x^2+5)^2} \\ &= \frac{2x^3+10x-2x^3+2x}{(x^2+5)^2} \\ g'(x) &= \frac{12x}{(x^2+5)^2}\end{aligned}$$

- $h(x) = \sqrt{5x+6}$ pour $x \in \left]-\dfrac{5}{6}, +\infty\right[$

$$\begin{aligned}\forall x \in \left]-\frac{5}{6}, +\infty\right[, h'(x) &= \frac{(5x+6)'}{2\sqrt{5x+6}} \\ h'(x) &= \frac{5}{2\sqrt{5x+6}}\end{aligned}$$

1. $f(x) = (x^2+5)\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   Expliquons pourquoi la courbe n'admet aucune tangente horizontale.
   Soit $a \in \mathbb{R}$. La courbe de la fonction f admet une tangente horizontale en un point d'abscisse a lorsque $f'(a) = 0$
   Cherchons a

$$\begin{aligned}f'(a) = 0 &\iff \frac{3a^2+5}{2\sqrt{a}} = 0 \\ &\iff 3a^2+5 = 0 \quad \text{(Absurde)} \quad \text{car } \forall a \in \mathbb{R};\ 3a^2+5 > 0\end{aligned}$$

   Ainsi il n'existe aucun réel a pour lequel $f'(a) = 0$.
   D'où la courbe représentative de f n'admet aucune tangente horizontale.

2. $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+5}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   Donnons l'équation de la droite tangente au point d'abscisse 1.

Cont.

Soit (T) cette tangente.
$(T) : y = g'(1)(x-1) + g(1)$
On a : $g'(1) = \dfrac{12 \times 1}{(1^2+5)^2} = \dfrac{12}{6^2} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ $\quad g'(1) = \dfrac{1}{3}$
$g(1) = \dfrac{1^2-1}{1^2+5} = 0 \quad g(1) = 0$
Donc $(T) : y = \dfrac{1}{3}(x-1) + 0$
D'où $(T) : y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$ est l'équation de la droite tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1.

3. $h(x) = \sqrt{5x+6}$ pour $x \in \left]-\dfrac{5}{6}, +\infty\right[$.
Déterminons l'abscisse x en laquelle la droite tangente à la courbe $\mathcal{C}_h$ est parallèle à la droite l'équation $y = \dfrac{5}{8}x + 4$.
Soit (T) la tangente à la courbe C_h au point d'abscisse x.
La tangente (T) est parallèle à la droite $y = \dfrac{5}{8}x + 4$ si et seulement si le coefficient directeur de (T) est égal à $\dfrac{5}{8}$ or le coefficient directeur de la tangente (T) au point d'abscisse x est $h'(x)$ donc $h'(x) = \dfrac{5}{8}$.

$$\begin{aligned} h'(x) = \frac{5}{8} &\iff \frac{5}{2\sqrt{5x+6}} = \frac{5}{8} \\ &\iff \frac{1}{2\sqrt{5x+6}} = \frac{1}{8} \\ &\iff 2\sqrt{5x+6} = 8 \\ &\iff \sqrt{5x+6} = 4 \\ &\iff 5x+6 = 16 \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

D'où $x = 2$ est l'abscisse en laquelle la droite tangente à la courbe $\mathcal{C}_h$ est parallèle à la droite l'équation $y = \dfrac{5}{8}x + 4$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = x\sqrt{x}$$

1. Étudions la dérivabilité de f en 0 en revenant à la définition de cette notion.
Calculons la limite en 0 du taux de variation de la fonction f en 0.
Soit $h \in [0, +\infty[$

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{f(0+h)-f(0)}{0+h-0}\\ &= \frac{f(h)-f(0)}{h}\\ &= \frac{h\sqrt{h}-0}{h}\\ \tau(h) &= \sqrt{h}\end{aligned}$$

Et $\lim\limits_{h\to 0}\tau(h) = \lim\limits_{h\to 0}\sqrt{h} = 0$
Ainsi la fonction f est dérivable en 0.

2. Donnons l'expression de la fonction dérivée de f sur son ensemble de dérivabilité, en la simplifiant le plus possible:

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,+\infty[;\ f'(x) &= (x)'\sqrt{x} + x(\sqrt{x})'\\ &= \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\\ &= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}\\ f'(x) &= \frac{3}{2}\sqrt{x}\end{aligned}$$

The End.