CORRECTION CONTRÔLE 5

Exercice 1 :

On considère la suite u_n définie par $u_0 = 1$ et pour $n \geq 0$: $u_{n+1} = u_n + 2n - 3$

1. Montrons que $u_3 = -2$
   On sait que $u_0 = 1$ donc :

$$\begin{aligned} u_{(0+1)} &= u_0 + 2 \times 0 - 3 \\ u_1 &= 1 + 0 - 3 \\ u_1 &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{(1+1)} &= u_1 + 2 \times 1 - 3 \\ u_2 &= -2 + 2 - 3 \\ u_2 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{(2+1)} &= u_2 + 2 \times 2 - 3 \\ u_3 &= -3 + 4 - 3 \\ u_3 &= -2 \end{aligned}$$

   D'où $u_3 = -2$

2. Démontrons que cette suite est croissante à partir d'un rang qu'on précisera.
   On a: pour $n \geq 0\,; u_{n+1} = u_n + 2n - 3$
   Ainsi pour $n \geq 0$: $u_{n+1} - u_n = 2n - 3$; or pour tout $n \geq 2\,; 2n - 3 > 0$
   Donc $n \geq 2\,; u_{n+1} > u_n$
   On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 2.

Exercice 2 :

1. Étudions le sens de variation de la suite (u_n) définie pour $n \geq 2$ par $u_n = \dfrac{2n}{n-1}$
   Comparons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

On a: $u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{n+1-1}$ donc $u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{n}$

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\dfrac{2(n+1)}{n}}{\dfrac{2n}{n-1}}\\
&= \frac{2(n+1)}{n} \times \frac{n-1}{2n}\\
&= \frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\\
&= \frac{n^2-1}{n^2}\\
&= 1 - \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Or pour tout $n \geq 1$; $\dfrac{1}{n^2} \geq 0$ donc $1 - \dfrac{1}{n^2} < 1$
Ainsi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ d'où $u_{n+1} < u_n$.
On conclut donc que la suite u_n est strictement décroissante pour tout $n \geq 2$.

2. Étudions le sens de variation de la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 7 - 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$
Comparons $v_{n+1} - v_n$ à 0.
On a : $v_{n+1} = 7 - 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= 7 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 7 + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\\
&= -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\\
&= -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{3} + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\\
&= 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(-\frac{1}{3} + 1\right)\\
&= 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{2}{3}\\
&= 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{3}\\
&= 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Or pour $n \in \mathbb{N}$; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} > 0$ et $4 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} > 0$
Ainsi $v_{n+1} - v_n > 0$ d'où $v_{n+1} > v_n$.
On conclut donc que la suite v_n est strictement croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cont.

3. $(w_n)_{n\geq 1}$ est la suite de terme général $w_n = \dfrac{2\times 0,5^n}{n}$

   (a) Montrons que, pour tout $n \geq 1, w_n > 0$
   On a :

$$\begin{aligned}
0.5 > 0 &\iff 0.5^n > 0^n \;\text{ car } n \geq 1\\
&\iff 0.5^n > 0\\
&\iff 2\times 0.5^n > 2\times 0 \;\text{ car } 2 > 0\\
&\iff 2\times 0.5^n > 0\\
&\iff \frac{1}{n}\times 2\times 0.5^n > \frac{1}{n}\times 0 \text{ ; car } \frac{1}{n} > 0 \text{ pour tout } n \geq 1\\
&\iff \frac{2\times 0.5^n}{n} > 0
\end{aligned}$$

   D'où pour tout $n \geq 1; w_n > 0$.

   (b) En utilisant la méthode des quotients, étudions le sens de variation de (w_n)
   Comparons $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}$ à 1.
   On a: $w_{n+1} = \frac{2\times 0.5^{n+1}}{n+1}$

$$\begin{aligned}
\frac{w_{n+1}}{n} &= \frac{\frac{2\times 0.5^{n+1}}{n+1}}{\frac{2\times 0.5^n}{n}}\\
&= \frac{2\times 0.5^{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{2\times 0.5^n}\\
&= \frac{n}{n+1}\times\frac{0.5^{n+1}}{0.5^n}\\
&= 0.5\times\frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

   Or pour tout $n \geq 1$; $n+1 > n$ donc $\dfrac{n}{n+1} < 1$ par conséquent $0.5\times\dfrac{n}{n+1} < 0.5 < 1$
   Ainsi $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} < 1$; d'où $w_{n+1} < w_n$
   On conclut donc que la suite (w_n) est strictement décroissante pour tout $n \geq 1$.

Exercice 3 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 + 2n + 1$

1. Donnons l'expression de la fonction f telle que $f(n) = U_n$.
   L'expression de f telle que $f(n) = U_n$ est $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

2. Étudions le sens de variation de f et déduisons celui de la suite (u_n).
   Sens de variation de f:

   - Domaine de définition de f:
     f est une fonction polynôme donc son domaine de définition est $\mathbb{R}$, ainsi $Df = \mathbb{R}$
   - La fonction f étant une fonction polynôme alors elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
     Pour tout $x \in Df$; $f'(x) = 2x + 2$

- Signe de $f'(x)$:
  Posons $f'(x) = 0$
  $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$2x+2$		$-$	0	$+$	

  Ainsi f est strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$ et est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

Déduisons le sens de variation de la suite.
La fonction f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$ or $[0;+\infty[\subset]-1;+\infty[$.
On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 4 :

Calculons les produits scalaires suivants:

1. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JA}) \\ &= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{JA}\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BJ} = 0$ car $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BJ}$
Le projeté orthogonal de J sur (BC) est B et le projeté orthogonal de A sur (BC) est O donc:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{JA} &= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BO} \\ &= ||\overrightarrow{BC}|| \times ||\overrightarrow{BO}|| \text{ car } \overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{BO} \text{ sont colinéaire et de même sens} \\ &= BC \times BO \\ &= BC \times \frac{BC}{2} \\ &= \frac{BC^2}{2} \\ &= \frac{4^2}{2} \\ &= 8\end{aligned}$$

D'où $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 8$

2. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AJ}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AJ} &= -\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{JA} \\ &= -8 \text{ car de ce qui précède; } \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{JA} = 8\end{aligned}$$

D'où $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AJ} = -8$

Cont.

3. $\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JB}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JB} &= ||\overrightarrow{JA}|| \times ||\overrightarrow{JB}|| \times \cos(\overrightarrow{JA};\overrightarrow{JB})\\ &= JA \times JB \times \cos 30^\circ\\ &= 3 \times 7.5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \frac{22.5\sqrt{3}}{2}\\ &= 11.25\sqrt{3}\end{aligned}$$

D'où $\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JB} = 11.25\sqrt{3}$

Exercice 5 :

On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que: $||\overrightarrow{u}|| = 2, ||\overrightarrow{v}|| = 3$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 1$.
Calculons:

1. $(2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$

$$\begin{aligned}(2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) &= 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}.\overrightarrow{v}\\ &= 2||\overrightarrow{u}||^2 - 2 \times 1 + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} - ||\overrightarrow{v}||^2\\ &= 2 \times 2^2 - 2 + 1 - 3^2\\ &= 8 - 1 + 9\\ &= 16\end{aligned}$$

2. $(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v})^2$

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v})^2 &= ||\overrightarrow{u}||^2 + 4\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + 4||\overrightarrow{v}||^2\\ &= 2^2 + 4 \times 1 + 4 \times 3^2\\ &= 4 + 4 + 36\\ &= 44\end{aligned}$$

3. $(-3\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2$

$$\begin{aligned}(-3\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 &= 9||\overrightarrow{u}||^2 - 6\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2\\ &= 9 \times 4 - 6 + 9\\ &= 39\end{aligned}$$

4. $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 - (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2$

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 - (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 &= ||\overrightarrow{u}||^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} - ||\overrightarrow{v}||^2\\ &= -4\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\\ &= -4\end{aligned}$$

The End.