CORRECTION CONTRÔLE 9

Exercice 1 :

1. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = 1,2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   (a) Calculons les 4 premiers termes de la suite v_n:

   - v_0
     $v_0 = (1,2)^0$ donc $v_0 = 1$
   - v_1
     $v_1 = (1,2)^1$ donc $v_1 = 1,2$
   - v_2
     $v_2 = (1,2)^2$ donc $v_2 = 1,44$
   - v_3
     $v_3 = (1,2)^3$ donc $v_3 = 1,728$

   (b) Montrons que la suite (v_n) vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = 1,2v_n$.
   On a: $v_n = 1,2^n$ alors $v_{n+1} = (1,2)^{n+1}$
   Or $(1,2)^{n+1} = 1,2^n \times 1,2$
   Donc $v_{n+1} = 1,2v_n$; d'où le résultat.

   (c) Déduisons son sens de variation.
   De ce qui précède on a: $v_{n+1} = 1,2v_n$ donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1,2 > 1$
   Ainsi $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} > 1$ d'où $v_{n+1} > v_n$
   Par conséquent la suite (v_n) est strictement croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. On considère la suites (u_n) définie par $u_n = -2 - 3n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

   (a) Calculons les 4 premiers termes de cette suite:

   - u_1
     $u_1 = -2 - 3(1)^2 = -2 - 3 \times 1$ donc $u_1 = -5$
   - u_2
     $u_2 = -2 - 3(2)^2 = -2 - 3 \times 4$ donc $u_2 = -14$
   - u_3
     $u_3 = -2 - 3(3)^2 = -2 - 3 \times 9$ donc $u_3 = -29$
   - u_4
     $u_4 = -2 - 3(4)^2 = -2 - 3 \times 16$ donc $u_4 = -50$

(b) Exprimons $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.
On a: $u_n = -2 - 3n^2$ alors $u_{n+1} = -2 - 3(n+1)^2$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -2 - 3(n+1)^2 - (-2 - 3n^2) \\ &= -2 - 3(n^2 + 2n + 1) + 2 + 3n^2 \\ &= -3n^2 - 6n - 3 + 3n^2 \\ u_{n+1} - u_n &= -6n - 3 \end{aligned}$$

D'où $u_{n+1} - u_n = -6n - 3$

(c) Donnons le sens de variation de (u_n).
La suite (u_n) est une suite décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Justification:
On a: $u_{n+1} - u_n = -6n - 3$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $6n + 3 > 0$ donc $-6n - 3 < 0$
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} - u_n < 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} < u_n$
D'où la suite (u_n) est strictement décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{2}{n}$ pour tout $n \geq 1$

1. Calculons u_2 et u_3.

   - u_2
     $u_2 = u_{1+1} = u_1 + \dfrac{2}{1} = 1 + 2$ donc $u_2 = 3$
   - u_3
     $u_3 = u_{2+1} = u_2 + \dfrac{2}{2} = 3 + 1$ donc $u_3 = 4$

2. Déterminons le sens de variation de la suite (u_n).
   La suite (u_n) est une suite strictement décroissante.
   Justification:
   On a pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{2}{n}$ donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{n}$
   Or pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{2}{n} > 0$
   Ainsi $u_{n+1} - u_n > 0$
   D'où la suite (u_n) est bien une suite strictement décroissante.

3. Oui il existe une valeur pour laquelle $u_n > 7$.
   La plus petite valeur n pour laquelle $u_n > 7$ est $n = 16$
   Pour obtenir la réponse, on utilisera la calculatrice:
   On connaît déjà $u_3 = 4$ donc on continue le calcul des termes suivants sur la calculatrice en faisant:

   1) $4 + \dfrac{2}{4}$ pour obtenir u_4.

   2) On enregistre ce résultat dans la mémoire de la calculatrice.

Cont.

3) Calculer maintenant $\dfrac{2}{5}$ et ajouter ce résultat à celui enrégistré dans la mémoire de la calculatrice en appuyant sur la touche $\boxed{M+}$.

4) Reprendre l'étape trois pour chacun des termes consécutifs $n > 5$ en calculant $\dfrac{2}{n}$ puis en ajoutant le résultat du calcul au résultat enregistré dans la mémoire de la calculatrice.

5) Vérifier la valeur enregistré dans la mémoire en appuyant après chaque calcul la touche $\boxed{RM}$.

6) S'arrêter quand la valeur affichée après avoir appuyer la touche $\boxed{RM}$ est supérieure à 7. Puis noté le terme correspondant à cette valeur.

Exercice 3 :

Soit la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 3u_n - 4$.

1. Cette suite est définie par récurrence car le terme u_{n+1} est en fonction du terme u_n.

2. Complétons l'algorithme ci-dessous pour qu'il calcule le terme de rang n de la suite

```
def terme(n):
    u=2
    for k in range(n):
        u=3u-4
    return u
```

3. Pour calculer u_5 à l'aide de ce programme il faut mettre l'instruction : terme(5).

Exercice 4 :

Soit la fonction $f : x \to \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 5$

1. Calculer la dérivée f' de f.
   f étant une fonction polynôme alors elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
   D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 + 2x - 3$

2. Déterminons le signe de f'.
   De ce qui précède on a: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 + 2x - 3$
   Posons $f'(x) = 0$
   $f'(x) = 0 \iff x^2 + 2x - 3 = 0$
   Résolvons l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$.
   Soit Δ le discriminant de cette équation.
   $\Delta = 2^2 - 4(1)(-3) = 16 = 4^2$
   $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes:

$$x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$$

   Faisons un tableau de signe de la fonction $x \mapsto x^2 + 2x - 3$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x^2 + 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi:
$\forall x \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[; f(x) > 0;$
$\forall x \in]-3, 1[; f(x) < 0$
et pour $x = -3$ ou $x = 1$, $f(x) = 0$.

3. Déduisons le tableau de variation de f.
   Calculons d'abord les limites de f suivantes:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3}x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x^3 = +\infty$$
$$\lim_{x\to-3} f(x) = f(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 + (-3)^2 - 3(-3) + 5 = 14$$
$$\lim_{x\to1} f(x) = f(1) = \frac{1}{3}1^3 + 1^2 - 3 + 5 = \frac{10}{3}$$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	14	$\searrow$	$\frac{10}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. La suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{1}{3}n^3 + n^2 - 3n + 5$ est strictement croissante pour tout $n > 1$.
   Justification:
   De la question précédente la fonction f est telle que $f(n) = u_n$ or la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$ d'où la suite u_n est bien une suite strictement croissante pour tout $n > 1$

The End.