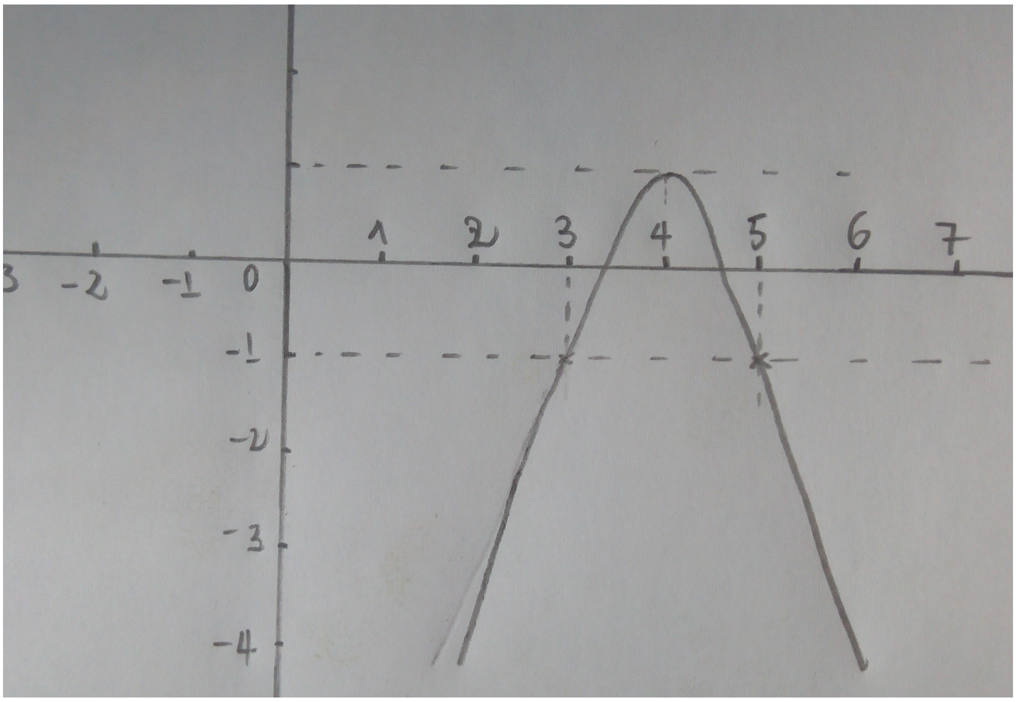
# CORRECTION CONTRÔLE 8

## Exercice 1 :

On considère une fonction polynôme du second degré $f$ vérifiant $f(3) = -1, f(5) = -1$ et admettant un maximum de valeur 1.

1. Effectuons un dessin rapide de la courbe représentative.




2. Une telle courbe représentative est appelée parabole.
   Donnons l'équation de l'axe de symétrie:
   L'axe de symétrie de cette courbe est la droite passant par le point d'abscisse 4 et parallèle à l'axe des ordonnées donc l'axe de symétrie a pour équation : $x = 4$.
   Donnons les coordonnées du sommet:
   Soit $S$ le sommet de la courbe représentative de $f$: $S(4, 1)$

3. Recherchons l'expression de $f(x)$ sous sa forme canonique.
   Soit $a \in \mathbb{R}$.
   La courbe représentative de la fonction $f$ est une parabole de sommet $S(4, 1)$ donc:
   $f(x) = a(x - 4)^2 + 1$.
   Or $f(3) = -1$, donc $a(3 - 4)^2 + 1 = -1$, ainsi $a = -2$
   D'où $f(x) = -2(x - 4)^2 + 1$.

4. Développons l'expression de $f$ et montrons que l'on a $f(x) = -2x^2 + 16x - 31$

$$\begin{aligned} f(x) &= -2(x-4)^2 + 1 \\ &= -2(x^2 - 8x + 16) + 1 \\ &= -2x^2 + 16x - 32 + 1 \\ f(x) &= -2x^2 + 16x - 31 \end{aligned}$$

5. Résolvons l'équation du second degré $f(x) = -7$.

$$\begin{aligned} f(x) = -7 &\iff -2x^2 + 16x - 31 = -7 \\ &\iff -2x^2 + 16x - 24 = 0 \end{aligned}$$

Résolvons l'équation $-2x^2 + 16x - 24 = 0$
Soit $\Delta$ le discriminant de cette équation.

$$\begin{aligned} \Delta &= (16)^2 - 4(-2)(-24) \\ &= 256 - 192 \\ &= 64 \\ \Delta &= 8^2 \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes:

$$x_1 = \frac{-16-8}{-4} = 6 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-16+8}{-4} = 2$$

Soit $S$ l'ensemble solution de l'équation $f(x) = -7$:

$$S = \{2, 6\}$$

6. Résolvons l'inéquation $f(x) > -7$.
Résolvons d'abord l'équation $f(x) = -7 \iff -2x^2 + 16x - 24 = 0$
De ce qui précède l'ensemble solutions de l'équation $-2x^2 + 16x - 24 = 0$ est: $S = \{2, 6\}$.
Faisons un tableau de signe:

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x^2 + 16x - 24$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

On déduit du tableau que $-2x^2 + 16x - 24 > 0$ si et seulement si $x \in ]2, 6[$
Soit $S_1$ l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) > -7$:

$$S_1 = ]2, 6[$$

## Exercice 2 :

Soit $f$ la fonction définie par: $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{3x - 1}$

Cont.

1. Déterminons l'ensemble de définition de $f$:
   $D_f = \{x \in \mathbb{R}/3x - 1 \neq 0\}$
   Posons $3x - 1 = 0$
   $3x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$
   D'où $D_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

2. Expliquons pourquoi $f$ est dérivable sur $D_f$ et calculons sa dérivée.
   La fonction $f$ est une fonction rationnelle alors elle est continue et dérivable sur son domaine de définition $D_f$.
   On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}, \quad f'(x) &= \frac{(2x^2+1)'(3x-1) - (3x-1)'(2x^2+1)}{(3x-1)^2} \\
&= \frac{4x(3x-1) - 3(2x^2+1)}{(3x-1)^2} \\
&= \frac{12x^2 - 4x - 6x^2 - 3}{(3x-1)^2} \\
f'(x) &= \frac{6x^2 - 4x - 3}{(3x-1)^2}
\end{aligned}$$

3. Déterminons les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ admet une droite tangente horizontale.
   Soit $a$ l'abscisse d'un point en lequel $C_f$ admet une tangente horizontale.
   On a: $f'(a) = 0$

$$\begin{aligned}
f'(a) = 0 &\Longleftrightarrow \frac{6a^2 - 4a - 3}{(3a-1)^2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow 6a^2 - 4a - 3 = 0
\end{aligned}$$

   Résolvons l'équation $6a^2 - 4a - 3 = 0$
   Soit $\Delta$ le discriminant de cette équation.

$$\begin{aligned}
\Delta &= (-4)^2 - 4(6)(-3) \\
&= 16 + 72 \\
&= 88 \\
\Delta &= (2\sqrt{22})^2
\end{aligned}$$

   $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes:

$$a_1 = \frac{4 - 2\sqrt{22}}{12} = \frac{2 - \sqrt{22}}{6} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{4 + 2\sqrt{22}}{12} = \frac{2 + \sqrt{22}}{6}$$

   D'où les abscisses des points où la courbe $C_f$ admet une tangente horizontale sont:
   $\dfrac{2 - \sqrt{22}}{6}$ et $\dfrac{2 + \sqrt{22}}{6}$

The End.